6. Еще один признак сходимости; построение действительных чисел

Вот еще один важный признак сходимости рядов.

Предложение 6.1 (признак абсолютной сходимости). *Пусть*

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

— ряд из комплексных чисел. Если ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$$

сходится, то и исходный ряд сходится.

Обратное утверждение, как известно, неверно: ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

сходится, а ряд из модулей его членов, как мы видели на прошлой лекции, расходится.

Доказательство. Положим $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Имеем $|a_n| \leqslant |z_n|$, $|b_n| \leqslant |z_n|$ для всякого n, так что из условия и признака сравнения вытекает, что ряды $\sum |a_n|$ и $\sum |b_n|$ сходятся. Если мы докажем, что из этого вытекает сходимость рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, то все будет доказано. Поэтому все сводится к случаю, когда все $z_n = x_n$ — действительные числа.

Далее, для всякого $x \in \mathbb{R}$ положим

$$\begin{aligned} x_+ &= \max(x, 0), \\ x_- &= -\min(x, 0). \end{aligned}$$

Имеем, очевидно, $x = x_+ - x_-$, причем x_+ и x_- — неотрицательные числа, не превосходящие $|x|$. Поскольку ряд $\sum |x_n|$ сходится, ряды с положительными членами $\sum (x_n)_+$ и $\sum (x_n)_-$ сходятся по признаку сравнения. Поскольку $x_n = (x_n)_+ - (x_n)_-$, имеем

$$x_1 + \ldots + x_n = ((x_1)_+ + \ldots + (x_n)_+) - ((x_1)_- + \ldots + (x_n)_-);$$

теперь сходимость последовательности частичных сумм ряда $\sum x_n$ вытекает из сходимости рядов $\sum (x_n)_+$ и $\sum (x_n)_-$ и теоремы о пределе разности. $\square$

Теперь перейдем к основной теме этой и нескольких следующих лекций — формальному и строгому определению действительных чисел.

Мы будем определять действительное число как последовательность рациональных чисел, «его приближающую». При этом, во-первых, надо, чтобы последовательность в принципе могла к чему-нибудь стремиться (приближения к какому числу задает последовательность $a_n = (-1)^n$?), и во вторых, надо отождествлять последовательности, «стремящиеся к одному и тому же».

Определение 6.2. Последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что $|a_m - a_n| < \varepsilon$, как только $m, n \geqslant N$.

(В этом определении ε — рациональное число: ведь мы делаем вид, что никаких других не знаем!)

Определение 6.3. Две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются *эквивалентными*, если $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Эквивалентность фундаментальных последовательностей будем обозначать знаком $\sim$.

Поскольку предел суммы равен сумме пределов, отношение эквивалентности на множестве фундаментальных последовательностей действительно заслуживает этого названия[1]. Следовательно, множество всех фундаментальных последовательностей представляется в виде объединения попарно не пересекающихся помдмножеств — «классов эквивалентности»: в каждом классе все последовательности эквивалентны, а никакие два последовательности из разных классов не эквивалентны.

Определение 6.4. *Действительным числом* называется класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Множество действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{Q}$, то последовательность $\{a_n\}$ эквивалентна последовательности, все члены которой совпадают с a. Если отождествить класс всякой такой последовательности с числом a, то получим вложение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$; далее мы всегда будем подразумевать, что $\mathbb{Q}$ вложено в $\mathbb{R}$ именно таким образом.

Итак, *множество* действительных чисел мы построили. Теперь надо определить сложение, умножение и неравенства и убедиться, что они

[1]То есть оно рефлексивно ($a \sim a$ для всех a), симметрично (если $a \sim b$, то $b \sim a$) и транзитивно (если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$).

обладают привычными свойствами. Для всего этого нужна небольшая техническая подготовка.

Предложение 6.5. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *сходится к числу* $a \in \mathbb{Q}$, *то она фундаментальна.*

Доказательство. Из условия следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon/2$ при $n \geqslant N$. Следовательно, если $m, n \geqslant N$, то $|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

Предложение 6.6. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

(Напомним, что последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число M, что $|a_n| \leqslant M$ для всех n.)

Доказательство. Если $\{a_n\}$ фундаментальна, то существует такое N, что $|a_m - a_n| < 1$, как только $m, n \geqslant N$. Следовательно, все члены последовательности с номерами, большими N, заключены между $a_N - 1$ и $a_N + 1$; поскольку кроме них у последовательности имеется только конечное число членов, последовательность ограничена. □

Теперь определим сложение, вычитание и умножение действительных чисел. Заметим, что если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — фундаментальные последовательности, то последовательности $\{a_n \pm b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ также фундаментальны. В самом деле, для суммы и разности это немедленно вытекает из неравенства $|(a_m \pm b_m) - (a_n \pm b_n)| \leqslant |a_m - a_n| + |b_m - b_n|$, а для произведения выводится из предложения 6.6 следующим образом. Поскольку $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ фундаментальны, существует такое M, что $|a_n| \leqslant M$ и $|b_n| \leqslant M$ для всех n; стало быть, если N настолько велико, что $|a_m - a_n| < \varepsilon/2M$ и $|b_m - b_n| < \varepsilon/2M$ при $m, n \geqslant N$, то

$$
\begin{aligned}
|a_m b_m - a_n b_n| &= |a_m(b_m - b_n) + (a_m - a_n)b_n| \leqslant \\
&\leqslant |a_m| \cdot |b_m - b_n| + |a_m - a_n| \cdot |b_n| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Имея это в виду, определим сумму (соответственно разность, произведение) действительных чисел, заданных фундаментальными последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, как действительно число, заданное фундаментальной последовательностью $\{a_n + b_n\}$ (соответственно $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$).

Чтобы это определение было корректным, надо, чтобы при замене последовательности $\{a_n\}$ или $\{b_n\}$ на эквивалентную результирующая последовательность также заменялась на эквивалентную. Для сложения и вычитания это совсем легко: если $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, т. е. $a_n - a'_n \to 0$, то и последовательность $(a_n + b_n) - (a'_n + b_n) = a_n - a'_n$ также стремится к нулю. Для умножения это опять-таки выводится из предложения 6.6: если $a_n - a'_n \to 0$ и $|b_n| \leqslant M$ при всех n, то $|a_n b_n - a'_n b_n| \leqslant M \cdot |a_n - a'_n|$, и правая часть этого неравенства стремится к нулю.

Итак, мы определили на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел сложение и умножение; очевидно, что эти операции обладают обычными свойствами (коммутативность, ассоциативность, наличие нуля и противоположных элементов, дистрибутивность).

Чтобы доказать возможность деления на ненулевое число, а также определить неравенства, нам понадобится еще один технический факт.

Предложение 6.7. *Пусть $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность рациональных чисел, не стремящаяся к нулю. Тогда либо существуют такие $c > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \geqslant c$ при всех $n > N$, либо существуют такие $c < 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \leqslant c$ при всех $n > N$.*

Доказательство. Поскольку $\{a_n\}$ не стремится к нулю, существует такое $\varepsilon > 0$, что для бесконечно большого количества номеров $n \in \mathbb{N}$ имеем $|a_n| \geqslant \varepsilon$. Поскольку $\{a_n\}$ фундаментальна, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при $m, n \geqslant N$ имеем $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Так как, в частности, существует $n \geqslant N$, для которого $|a_n| \geqslant \varepsilon$, отсюда следует, что при $m \geqslant N$ имеем либо $a_m > \varepsilon/2$, либо $a_m < -\varepsilon/2$. Так как при $m, m' \geqslant N$ имеем $|a_m - a_{m'}| < \varepsilon/2$, отсюда вытекает, что только одно из этих неравенств выполняется при всех $m \geqslant N$. В первом из этих случаев полагаем $c = \varepsilon/2$, во втором полагаем $c = -\varepsilon/2$. $\square$