5. Еще о пределах; ряды

Докажем сначала предложение, на которое нам не хватило времени на прошлой лекции.

Предложение 5.1. *Для всякого $b>0$ имеем* $\lim_{n\to\infty}(\ln n/n^b)=0$.

(Переход к произвольному основанию логарифмов очевиден.)

Доказательство. Выберем такое натуральное k, что $1/k<b$. Поскольку

$$0\leqslant \frac{\ln n}{n^b}\leqslant \frac{\ln n}{n^{1/k}},$$

теорема о двух милиционерах показывает, что достаточно доказать предложение для случая $b=1/k$, где k — натуральное число; в дальнейшем будем считать, что b именно таково.

Лемма 5.2. *Для всякого $x\geqslant 0$ имеем $\ln(1+x)\leqslant x$.*

Доказательство леммы. Положим $f(x)=\ln(1+x)-x$; имеем

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-x\leqslant 0\quad \text{при } x\geqslant 0.$$

Следовательно, функция f монотонно убывает на интервале $[0;+\infty)$; поскольку к тому же $f(0)=0$, отсюда следует, что $f(x)\leqslant 0$ при $x\geqslant 0$, что и требовалось. $\square$

В доказательстве леммы мы воспользовались свойствами производных и признаком монотонности функции, известным из школьного курса, но пока что не доказанным строго; порочного круга это не создает, так как при доказательстве этих результатов в нашем курсе предложение 5.1 использоваться не будет.

Итак, пусть k — натуральное число. В дроби $\frac{\ln n}{n^{1/k}}$ в числителе и знаменателе стоят монотонно возрастающие последовательности неотрицательных чисел; поэтому дискретное правило Лопиталя (предложение 4.7) показывает, что равенство $\lim_{n\to\infty}(\ln n/n^b)=0$ будет доказано, если мы установим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)^{1/k}-n^{1/k}}=0. \tag{5.1}$$

Заметим, что ввиду леммы $\ln(n+1) - \ln n = \ln(1+1/n) \leqslant 1/n$; с другой стороны, применяя тождество

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}}{a^k - b^k}$$

для $a = (n+1)^{1/k}$, $b = n^{1/k}$, получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^{1/k} - n^{1/k}} = (n+1)^{(k-1)/k} + (n+1)^{(k-2)/k}n^{1/k} + \ldots \\ + (n+1)^{1/k}n^{(k-2)/k} + n^{(k-1)/k} \leqslant k(n+1)^{(k-1)/k}.\end{aligned}$$

Следовательно, последовательность в (5.1) можно оценить так:

$$\frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)^{1/k} - n^{1/k}} \leqslant \frac{k}{n} \cdot (n+1)^{(k-1)/k};$$

при этом

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n} \cdot (n+1)^{(k-1)/k} = k \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)^{(k-1)/k} = \\ = k \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot (n+1)^{-1/k}.\end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ и $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1/k} = 0$, отсюда и из теоремы о двух милиционерах следует, что выполняется соотношение (5.1). Это доказывает предложение. □

Перед тем как переходить к следующей теме, скажем несколько слов про пределы последовательностей комплексных чисел. Определение предела для такой последовательности выглядит дословно так же, как определение 1.1. Именно, пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел и $a \in \mathbb{C}$. Тогда говорят, что $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|z_n - a| < \varepsilon$, как только $n > N$. Переформулировка с ε-окрестностями также возможно, только на сей раз множество $z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < \varepsilon$ — это не интервал, а открытый круг в комплексной плоскости. Предложение 1.3 (единственность предела), а также предложения 1.4, 1.5, 1.8 и 1.9 («арифметика пределов») также выполнены, с теми же доказательствами. Аналога теоремы о двух милиционерах для последовательностей комплексных чисел нет, так как неравенства между комплексными числами не определяются.

Следующее простое предложение устанавливает связь между пределами последовательностей комплексных и действительных чисел.

Предложение 5.3. *Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел и $a \in \mathbb{C}$. Положим $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$, $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$, $x = \mathrm{Re}(a)$, $y = \mathrm{Im}(a)$. Тогда следующие два утверждения равносильны:*

(1) $\lim_{n\to\infty} z_n = a$*;*

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*,* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$*.*

Доказательство. Ясно, что равенства $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ равносильны равенствам $\lim_{n\to\infty} |z_n - a| = 0$, $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$ и $\lim_{n\to\infty} |y_n - a| = 0$ соответственно. Теперь равносильность утверждений (1) и (2) вытекает из очевидных неравенств

$$0 \leqslant |x_n - a| \leqslant |z_n - a| \leqslant |x_n - a| + |y_n - a|$$

(и аналогичного с $|y_n - a|$ в левой части), теоремы о пределе суммы и теоремы о дух милиционерах. $\square$

Ряды

Строго говоря, теория рядов — не что иное, как изложенная иным способом теория пределов последовательностей; тем не менее соответствующие формулировки и широко используются, и весьма удобны.

Определение 5.4. *Рядом* называется формальная бесконечная сумма

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где a_j — произвольные комплексные числа. Другие обозначения: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ или попросту $\sum a_n$. Иногда также суммирование начинается с нуля или с другого номера.

Определение 5.5. *Частичными суммами* ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называются суммы $S_k = a_1 + \ldots + a_k$.

Ряд называется *сходящимся*, если существует предел $\lim_{k\to\infty} S_k$, и число $S = \lim_{k\to\infty} S_k$ называется при этом *суммой ряда*. Обозначение:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

Если ряд не является сходящимся, он называется *расходящимся*.

Перечислим некоторые простые свойства рядов.

Предложение 5.6. *(i) Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$*, причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(ii) Для всякого $k \in \mathbb{N}$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

(iii) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n)$*, и при этом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n).$$

Доказательство. Утверждение (i) следует из того, что предел суммы равен сумме пределов, утверждение (ii) — из того, что частичные суммы ряда $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ отличаются от частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на константу, а утверждение (iii) — из предложения 5.3. □

Наша ближайшая цель — установить различные «признаки сходимости» рядов, то есть критерии, позволяющие по внешнему виду ряда выяснить, что он сходится или расходится. Самый простой в этом ряду — следующий необходимый признак сходимости.

Предложение 5.7. *Если ряд* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Говорят еще так: если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

Доказательство. Если $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ — сумма ряда, то $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Утверждение, обратное к предложению 5.7, совершенно неверно: существует много расходящихся рядов со стремящимся к нулю общим членом. Например, у ряда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

имеем
$$S_n \geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$
так что предела $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится. Ниже нам встретятся и другие примеры.

К сходимости рядов с произвольными членами мы еще вернемся, а пока что займемся признаками сходимости «рядов с положительными членами».

Определение 5.8. Ряд $\sum a_n$ называется *рядом с положительными членами*, если все a_n суть неотрицательные действительные числа.

Предложение 5.9. *Ряд с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.*

Доказательство. Пусть $\sum a_n$ — ряд с положительными членами и $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ — его частичные суммы. Тогда последовательность $\{A_n\}$ является монотонно возрастающей, а монотонно возрастающая последовательность действительных чисел сходится тогда и только тогда, когда она ограничена (см. лемму 1.7 и предложение 1.12). □

Предложение 5.10 (признак сравнения). *Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — ряды с положительными членами, причем $a_n \geqslant b_n$. Тогда:*
- *если ряд $\sum a_n$ сходится, то и ряд $\sum b_n$ сходится;*
- *если ряд $\sum b_n$ расходится, то и ряд $\sum a_n$ расходится.*

Доказательство. Два утверждения логически эквивалентны, так что достаточно доказать первое из них. Обозначим частичные суммы через $A_n = \sum_{k=1}^n a_n$ и $B_n = \sum_{k=1}^n b_n$; из условия следует, что $B_n \leqslant A_n$ при всех n. Ввиду условия $A_n \leqslant A = \sum a_n$; следовательно, $B_n \leqslant A$ при всех n и ряд $\sum b_n$ сходится ввиду предложения 5.9. □

Замечание 5.11. Предложение 5.6(ii) показывает, что признак сравнения можно усилить, потребовав в его условии, чтобы неравенство выполнялось не при всех n, но при всех n, больших некоторого $N \in \mathbb{N}$; в дальнейшем мы будем при необходимости применять этот признак именно в такой форме.

Чтобы пользоваться признаком сравнения, необходимо иметь набор рядов для сравнения, про которые нам заранее известно, что эти ряды сходятся или расходятся. Простейший из таких рядов — геометрическая прогрессия.

Предложение 5.12. *Пусть $a > 0$, $q > 0$. Тогда ряд*

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

сходится при $0 < q < 1$ и расходится при $q \geqslant 1$.

Доказательство. При $q \geqslant 1$ ряд расходится, так как его общий член aq^{n-1} не стремится к нулю при $n \to \infty$ (предложение 5.7). Если же $0 < q < 1$, то предел частичных сумм можно посчитать явно:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q},$$

и ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

□

Явное выражение для суммы «бесконечно убывающей геометрической прогрессии», полученное в этом доказательстве, известно из курса средней школы.

Во многих случаях сравнение ряда с геометрической прогрессией можно проводить напрямую; в некоторых ситуациях оно упрощается, если применить следующее предложение.

Предложение 5.13. *Пусть $\sum a_n$ — ряд с положительными членами. Предположим, что существует предел $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = \theta$. Тогда если $\theta < 1$, то ряд сходится, а если $\theta > 1$, то ряд расходится.*

Доказательство. Предположим, что $\theta < 1$; выберем число q, удовлетворяющее неравенствам $\theta < q < 1$. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $a_{n+1}/a_n \leqslant q$. Имеем теперь, при $k > N$,

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leqslant a_N q^{k-N} = \frac{a_N}{q^N} \cdot a^k.$$

Стало быть, при всех $k \geqslant N$ k-й член ряда не превосходит k-го члена сходящейся геометрической прогрессии, так что $\sum a_n$ сходится по признаку сравнения (замечание 5.11).

Если $\theta \geqslant 1$, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$. Имеем теперь, при $k > N$,

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \geqslant a_N,$$

так что в этом случае общий член ряда не стремится к нулю. □

Вскоре мы увидим, что если в условиях признака Даламбера $\theta = 1$, то ряд может и сходится, и расходиться.

Наряду с геометрическими прогрессиями, для сравнения удобны ряды, о которых идет речь в следующем предложении. Признак Даламбера для них ничего не дает.

Предложение 5.14. *Пусть $s > 0$. Тогда ряд*

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots \tag{5.2}$$

сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $s > 1$; нам достаточно показать, что частичные суммы ряда (5.2) ограничены. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что ограничены частичные суммы вида

$$S_{2^n-1} = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(2^n-1)^s}.$$

Обозначая для краткости n-й член ряда через a_n, представим сумму S_{2^n-1} в следующем виде:

$$S_{2^n-1} = a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n-1}).$$

Оценим суммы в скобках. Сумма

$$(a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \tag{5.3}$$

состоит из 2^k слагаемых, и каждое из них не превосходит $a_{2^k} = 1/2^{ks}$. Поэтому сумма (5.3) не превосходит $2^k/2^{ks} = (2^{1-s})^k$, откуда

$$S_{2^n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (2^{1-s})^k \leqslant \frac{1}{1-2^{1-s}}$$

(мы воспользовались тем, что $2^{1-s} < 1$, так как $s > 1$). Этим доказана сходимость ряда при $s > 1$.

Пусть теперь $0 < s \leqslant 1$; так как $1/n^s \geqslant 1/n$, ввиду признака сравнения достаточно установить, что ряд расходится при $s = 1$; для этого достаточно установить неограниченность последовательности его частичных сумм.

Обозначая для краткости n-й член ряда через a_n, представим сумму S_{2^n-1} в следующем виде:

$$S_{2^n-1} = a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n-1}).$$

Сумма
$$(a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \tag{5.4}$$
состоит из 2^k слагаемых, и каждое из них больше $a_{2^{k+1}} = 1/2^{k+1}$. Поэтому сумма (5.4) не меньше $2^k/2^{k+1} = 1/2$, откуда
$$S_{2^n-1} \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \geqslant \frac{n}{2}.$$
Этим доказана неограниченность частичных сумм. □

Ряд (5.2) при $s = 1$ известен под названием *гармонического ряда.*