4. Некоторые классические пределы

После экскурса в теорию множеств вернемся к более конкретным задачам.

Предложение 4.1. *Если* $|q| < 1$, *то* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Доказательство. Заметим, что в силу самого́ определения предела равенства $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$ равносильны. Поэтому достаточно рассмотреть случай $q = |q| \geqslant 0$. Пусть, стало быть, $0 \leqslant q < 1$. Тогда последовательность $\{q^n\}$ монотонно убывает; так как она, очевидно, ограничена снизу нулем, из теоремы 1.12 (точнее, из ее аналога для убывающих последовательностей) вытекает, что существует предел $\lim_{n\to\infty} q^n = c$. Теперь имеем

$$c = \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} + \lim_{n\to\infty} (q \cdot q^n) = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = qc$$

(мы воспользовались предложением 1.5). Так как $q \neq 1$, из равенства $q = qc$ вытекает, что $c = 0$. □

Далее мы будем пользоваться известными из школы свойствами показательной и логарифмической функций; в дальнейшем мы дадим их строгие обоснования.

Предложение 4.2. *Пусть* $a > 0$, $b > 1$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty}(n^a/b^n) = 0$.

Доказательство. Пусть k — натуральное число, для которого $k \geqslant a$. Поскольку $0 \leqslant n^a/b^n \leqslant n^k/b^n$, теорема о двух милиционерах показывает, что достаточно установить равенство $\lim_{n\to\infty} n^k/b^n = 0$; иными словами, не ограничивая общности, можно считать, что $a \in \mathbb{N}$.

Положим $x_n = n^a/b^n$; покажем, что $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n)$ существует и равен $1/b < 1$. В самом деле,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}},$$

и первый сомножитель в правой части стремится к единице, так как $(n+1)/n \to 1$, а предел произведения равен произведению пределов, а второй сомножитель равен константе $1/b < 1$.

Выберем число q, для которого $1/b < q < 1$. Из доказанного вытекает, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_{n+1}/x_n \leqslant q$ при $n \geqslant N$. Следовательно, при $k > N$ имеем

$$x_k = \frac{x_k}{x_{k-1}} \cdot \frac{x_{k-1}}{x_{k-2}} \cdots \frac{x_{N+1}}{X_N} \cdot x_N \leqslant x_N q^{k-N} = \frac{x_N}{q^N} q^k.$$

Так как $\lim_{k\to\infty} q^k = 0$ по предложению 4.1, отсюда следует, что $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, что и требовалось. $\square$

Неформально говоря, доказанное предложение говорит, что показательная функция растет быстрее, чем степенная (при любых основаниях и показателях).

Сравним теперь рост логарифмических и линейных функций.

Предложение 4.3. *Пусть* $a > 1$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} \log_a n/n = 0$.

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Неравенство $\log_a n/n < \varepsilon$ равносильно неравенству $n < a^{\varepsilon n} < (a^{\varepsilon})^n$. Из предложения 4.2 вытекает, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $n/(a^{\varepsilon})^n < 1$ при $n > N$. Тогда $\log_a n/n < \varepsilon$ при $n > N$, и все доказано. $\square$

На самом деле верно равенство $\lim_{n\to\infty} \log_a x/x^b$ при всяком $b > 0$. Если $b > 1$, это следует из доказанного предложения (и теоремы о двух милиционерах); при $0 < b < 1$ доказательство этого факта более деликатно, и мы его пока отложим.

Следующий классический предел дает определение знаменитого числа e.

Предложение 4.4. *Последовательность*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4.1}$$

монотонно возрастает и ограничена и тем самым имеет предел.

Определение 4.5. Предел последовательности (4.1) называется *числом* e.

Доказательство. Разложим выражение для x_n по биному Ньютона:

$$\begin{aligned} x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n^n}; \end{aligned}$$

коэффициент при $1/k!$ равен $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots(1 - \frac{k-1}{n})$. Сравним это разложение с разложением для x_{n+1}. В разложении по биному Ньютона для $x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ будет $n + 1$ слагаемое; первые два слагаемых будут единицами, как и для x_n, а при $2 \leqslant k \leqslant n$ коэффициент при

$1/k!$ будет равен $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots(1-\frac{k-1}{n+1})$, и это больше, чем соответствующее слагаемое в разложении для x_n. Кроме того, в разложении для x_{n+1} присутствует еще последнее, $(n+1)$-е слагаемое, и это слагаемое равно $1/(n+1)^{n+1} > 0$. Стало быть, $x_{n+1} > x_n$, и монотонное возрастание доказано.

Чтобы доказать ограниченность, заметим, что из того же разложения для x_n явствует, что

$$x_n \leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}. \tag{4.2}$$

Поскольку $1/k! = 1/(2\cdot 3\ldots k) \leqslant 1/2^{k-1}$ при $k \geqslant 2$, правая часть в (4.2) не превосходит

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Этим доказана ограниченность. □

Для числа e существует еще одно важно представление в виде предела.

Предложение 4.6.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right). \tag{4.3}$$

Доказательство. В доказательстве предложения 4.4 мы установили, что все члены последовательности в правой части (4.3) не превосходят 3, а ограниченность этой последовательности очевидна. Стало быть, последовательность

$$y_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

сходится. Кроме того, в доказательстве того же предложения мы установили, что $y_n \geqslant x_n$, откуда вытекает, что $\lim_{n\to\infty} y_n \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n = e$ (см. задачу 4а из листка 1). Остается доказать обратное неравенство: $\lim_{n\to\infty} y_n \leqslant e$. Для этого заметим, что при любых $n, s > 0$ имеет место неравенство

$$\begin{gathered}1+1+\left(1-\frac{1}{n+s}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n+s}\right)\left(1-\frac{2}{n+s}\right)\frac{1}{3!}+\ldots\\
+\left(1-\frac{1}{n+s}\right)\left(1-\frac{2}{n+s}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+s}\right)\frac{1}{n!} \leqslant x_{n+s}\end{gathered}$$

(в самом деле, в левой части стоят первые $n+1$ членов разложения выражения для x_{n+s} по биному Ньютона). Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to \infty$ (см. ту же задачу первого листка), получим, что

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant \lim_{s\to\infty} x_{n+s} = e;$$

стало быть, $y_n \leqslant e$ для любого n, откуда $\lim_{n\to\infty} y_n \leqslant e$. Тем самым неравенство в противоположную сторону также доказано. □

Сейчас мы докажем одно общее утверждение о пределах, которое пригодится нам в дальнейшем. Иногда оно называется «теоремой Штольца» или «дискретным правилом Лопиталя».

Предложение 4.7. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — монотонно возрастающие последовательности действительных чисел, стремящиеся к бесконечности; предположим, что $y_{n+1} > y_n$ для всех n. Тогда если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = c,$$

то и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c.$$

Доказательство. Зададимся каким-нибудь $\varepsilon > 0$. Тогда ввиду условия существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$c - \varepsilon/2 < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < c + \varepsilon/2$$

при всех $n \geqslant N$.

Воспользуемся теперь следующей элементарной леммой, известней под обидным названием «сложение дробей для гуманитариев».

Лемма 4.8. *(i) Если a_1 и a_2 — произвольные действительные числа, b_1 и b_2 — произвольные положительные числа и $\frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{a_2}{b_2}$, то*

$$\frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \leqslant \frac{a_2}{b_2}.$$

(ii) Если $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные действительные числа, $b_1, \ldots, b_n$ — произвольные положительные числа и все отношения $\frac{a_i}{b_i}$ лежат на некотором интервале $(p; q)$, то и отношение

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}$$

лежат на интервале $(p; q)$.

Доказательство леммы. Утверждение (i) проверяется непосредственно (положительность чисел b_1 и b_2 используется при избавлении от знаменателя). Утверждение (ii) доказывается «индукцией по n», а попросту говоря — последовательным применением утверждения (i). Именно, отношение $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ лежит, ввиду (i), между $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$, и тем самым на интервале $(p;q)$; отношение $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}$ лежит, ввиду (i), между $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ и $\frac{a_3}{b_3}$, и тем самым опять-так на интервале $(p;q)$, и т. д. □

Возвращаясь к доказательству предложения, применим лемму 4.8(ii) к отношениям $\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}, \frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}}, \ldots, \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$, где $n > N$, получим, что $\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}$ лежит на интервале $(c-\varepsilon/2; c+\varepsilon/2)$ при всяком $n > N$; иными словами,

$$\left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - c\right| < \varepsilon/2 \quad \text{при всех } n > N. \tag{4.4}$$

Теперь в (4.4) остается заменить $\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}$ на $\frac{x_n}{y_n}$. Для этого покажем, что относительная погрешность при такой замене стремится к нулю при $n \to \infty$.

Лемма 4.9.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N} - \frac{x_n}{y_n}}{\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}} = 0.$$

Доказательство леммы. Имеем

$$\frac{\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N} - \frac{x_n}{y_n}}{\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}} = 1 - \frac{x_n}{y_n}\Big/\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} = 1 - \frac{x_n}{y_n}\Big/\left(\frac{x_n}{y_n}\cdot\frac{1-x_N/x_n}{1-y_N/y_n}\right) = 1 - \frac{1-y_N/y_n}{1-x_N/x_n};$$

правая часть стремится к нулю, так $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремятся к бесконечности. □

Теперь можно завершить доказательство предложения. Из неравенства (4.4) вытекает, что существует такое $M > 0$, что $\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}\right| \leqslant M$ при всех $n > N$. Ввиду леммы 4.9 существует такое N_1, что

$$\left|\frac{\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N} - \frac{x_n}{y_n}}{\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}}\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{при } n > N_1;$$

следовательно, при всех $n > N_1$ имеем

$$\left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - \frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon/2.$$

Значит, при всех $n > \max(N, N_1)$ имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - c\right| \leqslant \left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - \frac{x_n}{y_n}\right| + \left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и все доказано. □