3. Множества (продолжение)

Несчетность множества действительных чисел имеет следующее более или менее конкретное приложение.

Определение 3.1. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем уравнения некоторой степени $n \in \mathbb{N}$ с рациональными коэффициентами:

$$c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + \ldots + c_{n-1} a + c_n = 0. \tag{3.1}$$

Число, не являющееся алгебраическим, называется *трансцендентным.*

Избавляясь от знаменателя, можно считать, что все коэффициенты c_i в левой части (3.1) являются целыми числами, что мы и будем далее предполагать.

Теорема 3.2. *Трансцендентные числа существуют.*

Мы выведем эту теорему из следующего предложения.

Предложение 3.3. *Множество алгебраических чисел счетно.*

Так как множество всех действительных чисел несчетно, то предложение 3.3 действительно влечет теорему 3.2.

Доказательство предложения. Покажем, что множество многочленов от одного переменного с целыми коэффициентами (т. е. левых частей уравнения (3.1)) счетно. В самом деле, множество многочленов степени 1, то есть пар коэффициентов (c_0, c_1), равномощно множеству $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и тем самым счетно; множество многочленов степени 2, то есть троек (c_0, c_1, c_2), равномощно $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ (обычно пишут просто $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$); так как $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$, имеем

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$$

(см. замечание после доказательства следствия 2.6); продолжая в том же духе, получаем, что для каждого d множество многочленов степени d с целыми коэффициентами счетно.

Стало быть, для каждого d все многочлены степени d с целыми коэффициентами можно расположить в последовательность

$f_{d1}, f_{d2}, \ldots, f_{dn}, \ldots$. Расположим все эти последовательности в виде таблицы:

$$\begin{array}{ccccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \cdots \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & \cdots \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & \cdots \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \end{array}$$

Теперь пересчитаем многочлены так же, как в доказательстве предложения 2.5: сначала многочлены с суммой индексов 2, затем многочлены с суммой индексов 3, и так далее:

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{31}, f_{22}, f_{13}, f_{41}, f_{32}, f_{23}, f_{14}, \ldots$$

Далее, многочлен степени d имеет не более d действительных корней. Имея это в виду, расположим все трансцендентные числа в последовательность таким образом: сначала выпишем все корни многочлена номер 1, затем все корни многочлена номер 2 (если таковые найдутся), и так далее; если у многочлена действительных корней нет, мы его пропустим; числа, встречавшиеся ранее, также будем опускать (ср. доказательство счетности множеств рациональных чисел). Тем самым все алгебраические числа можно организовать в последовательность, и счетность множеств алгебраических чисел доказана. □

Теорема 3.2 дает доказательство существования трансцендентных чисел, но не дает возможности ни про одно «разумное» число утверждать, что оно является трансцендентным. На самом деле существуют интересные конкретные примеры трансцендентных чисел (в частности, трансцендентны числа e и π), но доказать их трансцендентность непросто.

Следующее предложение в момент своего открытия (конец XIX века) произвело очень сильный эффект.

Предложение 3.4. *Множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощны.*

Это предложение, в частности, означает, что можно установить биекцию между прямой и плоскостью. На первый взгляд такое представляется невероятным: ведь каждому ясно, что прямая одномерна, а плоскость двумерна! На самом деле ничего страшного не происходит: предложение просто показывает, что одного только понятия мощности множества для формализации интуитивных представлений о размерности недостаточно. (Забегая вперед, скажем, что все становится на свои места, если привлечь понятие непрерывности.)

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}$ равномощно множеству C бесконечных последовательностей из нулей и единиц, достаточно показать, что $C\times C$ равномощно C. Биекцию же $f\colon C\times C\to C$ можно построить следующим образом. Если $a=(a_1,a_2,\ldots)$ и $b=(b_1,b_2,\ldots)$ — две последовательности нулей и единиц из C, то можно положить

$$f(a,b)=(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\ldots)$$

(элементы последовательностей a и b перемежаются). □

Введем некоторые обозначения, относящиеся к сравнению множеств по мощности. Если множества A и B равномощны, то будем писать $|A|=|B|$. Если множество A равномощно какому-то подмножеству в B, то будем писать $|A|\leqslant|B|$, а если при этом к тому же A не равномощно B, будем писать $|A|<|B|$ (например, $|\mathbb{N}|<|\mathbb{R}|$). В случае, когда $|A|<|B|$, будем говорить, что мощность множества A меньше мощности множества B. (Отдельного понятия «мощность множества A, обозначаемая через $|A|$, мы вводить не будем — для этого пришлось бы углубиться в аксиоматику теории множеств; ограничимся тем, что будем сравнивать мощности.) Вот два основные свойства сравнения мощностей.

Теорема 3.5. *Для любых двух множеств A и B обязательно имеем $|A|<|B|$, $|A|=|B|$ или $|B|<|A|$.*

Эту теорему доказать нетрудно, но для доказательства потребуется небольшой экскурс в аксиоматику. В свое время мы ее докажем, но не сейчас.

Теорема 3.6 (теорема Кантора—Бернштейна)**.** *Если $|A|\leqslant|B|$ и $|B|\leqslant|A|$, то $|A|=|B|$.*

Доказательство. Из условия явствует, что существуют биекции $f\colon A\to B_1$ и $g\colon B\to A_1$, где $B_1\subset B$, $A_1\subset A$.

Для всякого элемента $x\in A$ назовем его предшественником такой элемент $y\in B$, что $g(y)=x$; так как g — биекция, предшественник единственен, если он существует. Аналогично, для всякого $y\in B$ назовем его предшественником такой элемент $x\in A$, что $f(x)=y$; если он существует, то он единственен. Для каждого элемента $x\in A$ построим максимальную цепочку предшественников: сначала предшественник из B (если он существует), затем предшественник предшественника (если он существует, то это опять элемент из B), и т. д. Аналогично определим максимальную цепочку предшественников для элементов из B. Для всякого целого неотрицательного n обозначим через $A_n \subset A$ множество элементов, у которых максимальная длина цепочки предшественников равна n, а через A_∞ — множество элементов, у которых длина цепочки предшественников бесконечна. Аналогичный смысл имеют обозначения B_n и B_∞.

Заметим теперь, что f отображает A_∞ на B_∞ и, более того, индуцирует биекцию между этими множествами. Аналогично видим, что f биективно отображает A_k на B_{k+1} (для всякого k), а g биективно отображает B_k на A_{k+1}:

$$
\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[dr, "f" near start] & A_1 & A_2 \arrow[dr, "f" near start] & A_3 & \cdots & A_\infty \arrow[d, "f"] \\
B_0 \arrow[ur, "g"' near start] & B_1 & B_2 \arrow[ur, "g"' near start] & B_3 & \cdots & B_\infty.
\end{tikzcd}
$$

Теперь биекцию $\varphi\colon A \to B$ можно определить так:

$$
\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_{2k}, \\ g^{-1}(x), & x \in A_{2k-1}, \\ f(x), & x \in A_\infty. \end{cases}
$$

$\square$

Теорема Кантора—Бернштейна очень помогает при установлении равномощности различных множеств. Например, из нее сразу следует, что всякое подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$, содержащее хотя бы один отрезок, имеет мощность континуум: $|X| \leqslant |C|$, так как X содержится в $\mathbb{R}^2$, и $|C| \leqslant |X|$, так как X содержит отрезок.

Зададимся теперь вопросом, существуют ли мощности, большие, чем континуум. Сразу скажем, что ответ таков: существуют, да еще как!

Определение 3.7. Пусть X — множество; тогда через 2^X обозначается множество всевозможных подмножеств в X.

Происхождение этого обозначения таково: если X — конечное множество из n элементов, то 2^X, как известно, состоит из 2^n элементов. Отметим еще, что существует биекция между множеством $2^{\mathbb{N}}$ и множеством C бесконечных последовательностей из нулей и единиц: каждой последовательности $\{a_n\}$ ставится в соответствие множество

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 1\}.$$

Теорема 3.8. *Для любого множества X имеем $|X| < |2^X|$.*

Доказательство. Соотношение $|X| \leqslant |2^X|$ проверяется совсем просто: имеется очевидная биекция между X и множеством одноточечных подмножеств в X (элементу $a \in X$ ставится в соответствие подмножество $\{a\} \subset X$). Остается показать, что не существует биекции $f\colon X \to 2^X$. Рассуждая от противного, предположим, что такая биекция есть. Тогда рассмотрим множество

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}. \tag{3.2}$$

Множество Y является подмножеством в X и тем самым элементом из 2^X; так как f — биекция, существует такой элемент $x \in X$, что $f(x) = Y$. Теперь рассмотрим два случая.

(1) $x \in Y$. Так как $Y = f(x)$, это означает, что $x \in f(x)$, но тогда формула (3.2) показывает, что $x \notin Y$ — противоречие.

(2) $x \notin Y$. Так как $Y = f(x)$, это означает, что $x \notin f(x)$, но тогда формула (3.2) показывает, что $x \in Y$ — противоречие.

Итак, обо a priori возможных случая дают противоречие. Значит, искомая биекция не существует. □

Рассуждение, примененное в доказательстве этой теоремы, называется «диагональным приемом Кантора». Оно является обобщением рассуждения из доказательства предложения 2.9.

Итак, для каждого (в том числе и бесконечного) множества существует множество большей мощности, и эту иерархию бесконечностей можно продолжать весьма далеко. Важно сознавать, что на этом этапе при беспечном обращении с понятием множества могут возникать неприятные парадоксы. Пусть, например, X — множество *вообще всех* множеств. Тогда, очевидно, 2^X обязано совпадать с X, и это явным образом противоречит теореме 3.8. Если «развинтить» доказательство этой теоремы применительно к данному случаю, то получится такое приводящее к парадоксу рассуждение. Пусть

$$Y = \{X \mid X \text{ — множество и } X \notin X\}.$$

Тогда и допущение, что $Y \in Y$, и допущение, что $Y \notin Y$, оба приводят к противоречию.

Относиться к этому и ему подобным парадоксам лучше всего следующим образом. Множество — понятие слишком абстрактное, чтобы можно было судить о нем на основании непосредственной интуиции; если ей слишком доверять, то можно, как мы видели, попасть впросак. Когда парадоксы обнаружились, (в начале XX века) математиками была проведена большая работа по аксиоматизации и формализации теории множеств. Оставляя рассказ об этой аксиоматизации для других курсов (возможно, основное, что должен знать о ней математик, не специализирующийся по математической логике, — это что такая аксиоматизация существует), отметим два момента. Во-первых, за десятилетия, прошедшие с момента построения аксиоматической теории множеств, никаких противоречий в ней не обнаружилось, зато обнаружилось, что теория множеств — очень полезный и плодотворный язык и основа для математики. Практический вывод из аксиоматической теории множеств таков: недопустимо произвольно строить «слишком большие» множества. Законна конструкция множества 2^X, законны конструкции объединений (в том числе бесконечных), пересечений, декартовых произведений. Наконец, если какое-то множество уже есть, то законно строить в нем подмножество, состоящее из элементов, заданных каким-то условием. При этом никаких безобразий вроде несуществующего «множества всех множеств» уже не получится.