22. Связность; полнота

Эта лекция посвящена двум слабо связанным между собой темам из «абстрактной топологии» (по возможности, с конкретными приложениями).

22.1. Связность

Предложение-определение 22.1. Топологическое пространство X называется *несвязным*, если выполнено одно из трех эквивалентных условий:

1) X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств.

2) X представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств.

3) Существует непустое и отличное от всего X подмножество $M \subset X$, являющееся одновременно открытым и замкнутым.

Эквивалентность трех условий проверяется тривиально.

Топологическое пространство называется *связным*, если оно не является несвязным.

Подмножество Y в топологическом пространстве X называется *связным*, если оно связно относительно индуцированной топологии.

Приведем сначала примеры несвязных пространств.

Пример 22.2. Всякое дискретное пространство, состоящее из более чем одного элемента, очевидным образом несвязно. Вот более содержательный пример. Покажем, что если $M \subset \mathbb{R}$ — связное подмножество, то оно обязано быть «выпуклым»: если $a, b \in M$ и $a < b$, то $[a; b] \subset M$.

В самом деле, если $a < z < b$ и $z \notin M$, то имеем

$$M = (M \cap (-\infty; z)) \cup (M \cap (z; \infty)),$$

что и дает разбиение M на два непересекающихся непустых открытых подмножества.

Привести нетривиальный пример связного пространства немногим труднее.

Предложение 22.3. *Всякий отрезок* $[a; b] \subset \mathbb{R}$ *связен.*

Доказательство. Рассуждая от противного, пусть $[a;b]$ представлен в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых подмножеств U_1 и U_2. Рассмотрим функцию $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, заданную так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_1; \\ 1, & x \in U_2. \end{cases}$$

Функция f непрерывна, так как прообраз любого открытого (и вообще любого) подмножества в $\mathbb{R}$ равен либо U_1, либо U_2, либо $U_1 \cup U_2$; она принимает в каких-то точках значения 0 и 1, так как множества U_1 и U_2 непусты; поскольку никаких промежуточных значений она при этом не принимает, получаем противоречие со следствием 12.2. $\square$

Докажем теперь несколько простых, но важных общих свойств связных пространств.

Предложение 22.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причем X связно. Тогда $f(X) \subset Y$ также связно.*

Доказательство. Пусть, напротив, $f(X)$ несвязно. Тогда существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset Y$, что $f(X) \subset U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 \cap f(X) = \varnothing$, и оба пересечения $f(X) \cap U_1$ и $f(X) \cap U_2$ непусты. Отсюда вытекает, что X является объединением непустых непересекающихся подмножеств $f^{-1}(U_1)$ и $f^{-1}(U_2)$ и тем самым несвязно — противоречие. $\square$

Предложение 22.5. *Пусть топологическое пространство X обладает таким свойством: для любых двух точек $x, y \in X$ существует связное подмножество $I \subset X$, содержащее x и y. Тогда X связно.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $X = U_1 \cup U_2$, где открытые множества U_1 и U_2 непусты и не пересекаются. Выберем точки $x \in U_1$ и $y \in U_2$, и пусть $I \subset X$ — связное подмножество, существование которого утверждается в условии предложения. Тогда $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2)$, причем оба этих множества открыты в I в индуцированной топологии и непусты (одно содержит x, другое содержит y). Значит, I несвязно — противоречие. $\square$

Сопоставляя предложения 22.4 и 22.5, получаем, что любой интервал в $\mathbb{R}$ (такой, как $(a;b]$, $(-\infty;a)$, и т. д., в том числе само пространство $\mathbb{R}$) является связным.

Обобщая предыдущее замечание, приходим к такому определению.

Определение 22.6. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для всяких двух точек $x, y \in X$ существуют такие отрезок $[a; b] \subset \mathbb{R}$ и непрерывное отображение $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$, что $f(a) = x$ и $f(b) = y$.

Предложения 22.4 и 22.5 показывают, что всякое линейно связное пространство является связным. В частности, связны пространство $\mathbb{R}^n$, любой параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, и вообще любое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Существуют примеры связных пространств, не являющихся линейно связными (уже среди замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^2$); у нас такой пример содержится в листке 16.

Связные подмножества в $\mathbb{R}$ можно полностью описать следующим образом.

Предложение 22.7. *Подмножество $M \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда оно является отрезком $[a; b]$, полуоткрытым интервалом $(a; b]$ или $[a; b)$ или открытым интервалом $(a; b)$, где $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. (При символах ∞ и $-\infty$ квадратные скобки не ставятся; случай $a = b$ не исключен.)*

Доказательство. Мы уже отмечали, что всякое множество указанного вида является связным; покажем, что никаких других связных подмножеств в $\mathbb{R}$ нет.

Разберем сначала случай, когда M ограничено. Положим $a = \inf M$, $b = \sup M$. Заметим, что $(a; b) \subset M$. В самом деле, если $a < c < b$, то (по определению верхней и нижней граней) существуют такие числа u и v, что $a < u < c < v < b$ и при этом $u, v \in M$; пример 22.2 показывает, что $[u; v] \subset M$ и, в частности, $c \in M$.

Итак, $(a; b) \subset M$, никакие числа, меньшие a или большие b, во множество M не входят, и остается разобрать четыре возможных случая в зависимости от того, входят ли в M сами числа a и b — при этом получаем варианты $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$ и $[a; b]$.

Случай, когда M не ограниченно сверху и/или снизу, разберите самостоятельно. $\square$

Нелишне заметить, что ни о какой классификации связных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ речи быть не может.

Вот еще одно приложение доказанных результатов, полезное в анализе.

Предложение 22.8. *Всякое открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}$ единственным образом представляется в виде не более чем счетного объединения попарно непересекающихся открытых интервалов.*

Доказательство. Мы сначала докажем более слабое утверждение, в котором отсутствуют слова «не более чем счетного», а потом отдельно докажем утверждение о мощности семейства интервалов.

Введем на множестве U следующее отношение $\sim$: если $x, y \in U$, то $x \sim y$, если $x = y$ или отрезок, соединяющий x и y, целиком содержится в U. Покажем, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны; для доказательства транзитивности заметим, что если $x \sim y$ и $y \sim z$ (и если обозначить, например, через I_{xy} отрезок, соединяющий x и y), то либо отрезок I_{xz} совпадает с одним из отрезков I_{xy} и I_{yz}, либо $I_{xz} = I_{xy} \cup I_{yz}$; так как $I_{xy} \subset U$ и $I_{yz} \subset U$, в любом случае получаем, что $I_{yz} \subset U$, то есть $x \sim z$.

Итак, U представлено в виде объединения попарно непересекающихся классов эквивалентности. Пусть K — какой-нибудь из этих классов; множество K по самому построению выпукло и тем самым связно и тем самым является интервалом (предложение 22.7). Далее, покажем, что K — открытое подмножество в $\mathbb{R}$. В самом деле, если $x \in K$, то $x \in U$; так как $U \subset \mathbb{R}$ открыто, существует такое $\delta > 0$, что $(x - \delta; x + \delta) \subset U$. Все точки интервала $(x - \delta; x + \delta)$, очевидно эквивалентны точке x, так что $(x - \delta; x + \delta) \subset K$. Значит, классы эквивалентности открыты, и мы доказали существование разбиения U в объединение попарно непересекающихся открытых интервалов. Обратно, если U каким-либо образом представлено в виде объединения попарно непересекающихся открытых интервалов, то эти интервалы обязаны быть классами эквивалентности по отношению $\sim$: любые две точки, лежащие в одном интервале, содержащемся в U, очевидно эквивалентны, а точки, лежащие в двух непересекающихся открытых интервалах, содержащихся в U, эквивалентными быть не могут: если $x_1 \in (a_1; b_1)$, $x_2 \in (a_2; b_2)$ и $b_1 \leqslant a_2$, то $b_1 \notin U$ (так как в противном случае любой открытый интервал, содержащий b_1, будет иметь непустое пересечение с $(a_1; b_1)$) и тем самым $[x_1; x_2] \not\subset U$.

Итак, мы доказали существоаание и единственность разложения множества U в объединение попарно непересекающихся открытых интервалов. Осталось проверить, что семейство этих интервалов не более чем счетно. Для этого в каждом инреврале выберем по рациональному числу; так как интервалы не пересекаются., получим биекцию семейства интервалов с подмножеством в (счетном) множестве рациональных чисел. Значит, семейство интервалов не более чем счетно. $\square$

22.2. Полнота и пополнение

До сих пор метрические пространства были нам нужны исключительно для задания топологии. Сейчас мы рассмотрим конструкции, в которых метрика используется более существенно.

Определение 22.9. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Последовательность его точек $x_n \in X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $m, n > N$ выполнено неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Точно так же, как для последовательностей действительных или комплексных чисел, доказывается, что если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.

Определение 22.10. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность имеет предел.

Просетйший пример полного метрического пространства — $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$: его полнота равносильна критерию Коши сходимости последоательности. Разберемся теперь с полнотой пространства $\mathbb{R}^n$. Начнем со следующего полезного замечания.

Предложение 22.11. *Последовательность точек в $\mathbb{R}^n$ является фундаментальной относительно L^2 (евклидовой) метрики тогда и только тогда, когда она фундаментальна относительно L^∞-метрики.*

Доказательство. Как мы видели в примере 20.3, в $\mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\rho_\infty(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \sqrt{n} \cdot \rho_\infty(x, y).$$

Левое неравенство показывает, что всякая последовательность, фундаментальная относительно L^2-метрики, будет и подавно фундаментальна относительно L^∞-метрики: в обозначениях определения 22.9, значение N, найденное по данному ε для L^2-метрики, подойдет и для L^∞-метрики. Правое неравенство, напротив, показывает, что последовательность $\{x_n\}$, фундаментальная относительно L^∞-метрики, будет фундаментальна и относительно L^2-метрики: для данного $\varepsilon > 0$ найдем такое N, что $\rho_\infty(x_m, x_n) < \varepsilon/\sqrt{n}$ при $m, n > N$, тогда $\rho_2(x_m, x_n) < \varepsilon$ при $m, n > N$. □

Предложение 22.12. $\mathbb{R}^n$ *является полным, причем как относительно L^2 метрики, так и относительно L^∞-метрики.*

Доказательство. Нам надо доказать, что всякая фундаментальная последовательность сходится. Пример 20.3 показывает, что обе метрики задают на $\mathbb{R}^n$ одну и ту же топологию, так что множества последовательностей, сходящихся относительно одной или другой метрики, совпадают; предложение 22.11 показывает, что множества последовательностей, фундаментальных относительно одной или другой метрики, также совпадают. Значит, достаточно доказать это утверждение для L^∞-метрики. Однако же легко видеть, что последовательность точек из R^n сходится (соответственно фундаментальна) в L^∞-метрике тогда и только тогда, когда для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, сходится (соответственно фундаментальна) последовательность их k-х координат. Теперь предложение немедленно вытекает из обычного критерия Коши для $\mathbb{R}^n$. $\square$

Простейшим примером неполного пространства является интервал $(0;1)$ (с метрикой, индуцированной с $\mathbb{R}$): последовательность $x_n = 1/n$ фундаментальна (так как она сходится в $\mathbb{R} \supset (0;1)$), но предела в $(0;1)$ не имеет. В связи с этим примером находится следующий простой, но важный факт.

Предложение 22.13. *Пусть X — полное метрическое пространство. Подмножество $Y \subset X$ полно (в индуцированной метрике) в том и только том случае, когда оно замкнуто.*

Доказательство. Если Y замкнуто и $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность в Y, то она сходится к некоторой точке $y \in X$ ввиду полноты X, и $y \in Y$ ввиду замкнутости Y.

Обратно, если Y полно и последовательность его точек $\{y_n\}$ сходится к точке $y \in X$, то последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна, а следовательно, ввиду полноты Y, сходится к точке, лежащей в Y. Ввиду единственности предела имеем $y \in Y$. $\square$

Итак, $\mathbb{R}$ полно, а интервал $(0;1)$ — нет; между тем эти пространства гомеоморфны[1], то есть топологически неразличимы. Полнота пространства зависит от метрики, а не только от топологии!

Покажем теперь, что всякое метрическое пространство можно вложить в полное.

[1]Напомним из курса топологии, что два топологических пространства называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывное биективное отображение, обратное к которому тоже непрерывно.

Определение 22.14. Пусть X — метрическое пространство. Его *пополнением* называется пара $(\overline{X}, i)$, в которой $\overline{X}$ — полное метрическое пространство, $i\colon X \to \overline{X}$ — вложение, сохраняющее расстояния, и замыкание подмножества $i(X) \subset \overline{X}$ совпадает со всем $\overline{X}$.

Часто пополнением называют не пару $(\overline{X}, i)$, а пространство $\overline{X}$, поскольку отображение i обычно ясно из контекста.

Основное свойство пополнений состоит в том, что пополнение всегда существует и единственно. Сформулируем утверждение о существовании.

Теорема 22.15. *У всякого метрического пространства (X, ρ) существует пополнение.*

Примером пополнения может послужить любая пара, состоящая из полного метрического пространства $\overline{X}$ и вложения в него его «плотного» подмножества X (подмножество в топологическом пространстве называется плотным, если его замыкание совпадает со всем пространством). Например, $\mathbb{R}$ является пополнением $\mathbb{Q}$.

Доказательство теоремы 22.15 очень похоже на то, что мы делали при построении действительных чисел (и при этом проще, так как на сей раз нам не нужно определять арифметические операции и неравенства). Именно, назовем фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентными, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Рефлексивность и симметричность этого отношения очевидны; для проверки транзитивности заметим, что если $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ и $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n),$$

получим, что $\lim \rho(x_n, z_n) = 0$, то есть $\{x_n\} \sim \{z_n\}$.

Определим теперь $\overline{X}$ как множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей; отображение $i\colon X \to \overline{X}$ зададим, поставив в соответствие точке $x \in X$ класс последовательности $(x, x, \ldots)$, все члены которой равны x. Ясно, что эта последовательность фундаментальна и что отображение i является вложением.

Определим теперь метрику на $\overline{X}$.

Лемма 22.16. *Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две фундаментальные последовательности в метрическом пространстве, то существует предел $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.*

Доказательство. В силу критерия Коши достаточно установить, что последовательность $\rho(x_n, y_n)$ фундаментальна.

Лемма 22.17 (неравенство четырехугольника). *Для любых четырех точек a, b, c и d в метрическом пространстве выполнено неравенство*

$$|\rho(a,b) - \rho(c,d)| \leqslant \rho(b,c) + \rho(a,d).$$

Доказательство неравенства четырехугольника. Дважды применяя неравенство треугольника, получаем, что

$$\rho(a,d) \leqslant \rho(a,b) + \rho(b,d) \leqslant \rho(a,b) + \rho(b,c) + \rho(c,d),$$

откуда

$$\rho(a,b) - \rho(c,d) \leqslant \rho(b,c) + \rho(a,d).$$

Если $\rho(a,b) \geqslant \rho(c,d)$, то все доказано; в противном случае проведем то же рассуждение, поменяв местами пары (a,b) и (c,d). $\square$

Для доказательства леммы 22.16 заметим теперь, что в неравенстве

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n);$$

в правой части оба слагаемых стремятся к нулю при $m, n \to \infty$, что и доказывает фундаментальность последовательности $\{\rho(x_n, y_n)\}$. $\square$

Имея в виду лемму 22.16, определим метрику на $\overline{X}$, так: если элементы $\xi \in \overline{X}$, $\eta \in \overline{X}$ представлены последовательностями $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ соответственно, то

$$\overline{\rho}(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Для проверки того, что так определенное расстояние не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности, предположим, что $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$. Переходя к пределу в неравенстве

$$\rho(x'_n, y_n) \leqslant \rho(x'_n, x_n) + \rho(x_n, y_n),$$

получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

а меняя местами $\{x'_n\}$ и $\{x_n\}$, получаем обратное неравенство. Таким образом, функция $\overline{\rho}\colon \rightrightarrows\mathbb{R}$ определена. Покажем, что она удовлетворяет аксиомам метрики.

Симметричность очевидна; неравенство треугольника получается переходом к пределу в неравенстве

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Если, наконец, $\overline{\rho}(\xi, \eta) = 0$, где элементы $\xi \in \overline{X}$, $\eta \in \overline{X}$ представлены последовательностями $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ соответственно, то имеем

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

то есть $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, а это означает, что $\xi = \eta$.

Итак, $(\overline{X}, \overline{\rho})$ — метрическое пространство. То, что вложение i сохраняет расстояния, очевидно. Осталось проверить плотность $i(X)$ в $\overline{X}$ и полноту $\overline{X}$; это мы сделаем на следующей лекции.