21. Компактность

Компактность — чрезвычайно важное техническое понятие топологии и анализа. Начнем с определения.

Определение 21.1. Топологическое пространство X называется *компактным*, если оно обладает следующим свойством: во всяком семействе открытых подмножеств $\{U_\alpha\}$, обладающем тем свойством, что $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, существует такое конечное подсемейство $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$, что $X = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ (кратко эту мысль выражают так: из всякого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие).

Подмножество Y в топологическом пространстве X называется компактным, если оно компактно в топологии, индуцированной с X.

Пример 21.2. Всякое компактное подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ обязано быть ограниченным. В самом деле, для всякого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим открытое в M множество $U_n = B_n(0) \cap M$ (через 0 обозначено начало координат в $\mathbb{R}^n$, а через $B_n(0)$ — как обычно, открытый шар в метрическом пространстве $\mathbb{R}^n$ — скажем, относительно L^2-метрики). Ясно, что $M = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i$ и что неограниченное множество M не может быть объединением конечного подсемейства этого семейства.

Пример 21.3. Интервал $(0;1) \subset \mathbb{R}$ ограничен, но компактным все же не является: имеем $(0;1) = \bigcup_{n>2}(1/n; 1-1/n)$, и конечного подпокрытия из этого покрытия не выберешь.

Приведем теперь позитивный пример.

Предложение 21.4. *Всякий отрезок $[a;b] \subset \mathbb{R}$ компактен.*

Доказательство. Пусть $[a;b] = \bigcup_\alpha U_\alpha$ — открытое покрытие. Положим

$$X = \{\, x \in (a;b] \mid \text{Отрезок } [a;x] \text{ покрыт конечным числом множеств } U_\alpha \,\}.$$

Заметим, что $X \neq \varnothing$: в самом деле, пусть $a \in U_{\alpha_0}$, тогда $[a; a+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и, скажем, отрезок $[a; a+\varepsilon/2]$ покрывается всего лишь одним множеством из нашего семейства.

Далее, пусть $\xi = \sup X$; покажем, что $\xi \in X$. В самом деле, пусть $\xi \in U_\beta$. Так как U_β открыто, существует такое $\delta > 0$, что $(\xi-\delta; \xi] \subset U_\beta$; так как ξ — верхняя грань множества X, существует точка

$$c \in (\xi - \delta; \xi] \cap X \subset U_\beta \cap X;$$

по определению множества X имеем $[a;c] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ для каких-то $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; тогда $[a;\xi] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_\beta$, так что $\xi \in X$.

Покажем, наконец, что $\xi = b$. В самом деле, пусть $\xi \in U_\beta$; если $\xi < b$, то имеем $(\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon) \subset U_\beta$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда, добавляя, если надо, множество U_β к конечному семейству множеств U_α, покрывающих $[a;\xi]$, получаем, что, скажем, $\xi + \varepsilon/2 \in X$, в противоречие с тем, что $\xi = \sup X$.

Коль скоро $\xi = b$, отрезок $[a;b]$ покрывается конечным числом множеств U_α, что и требовалось доказать. □

Чтобы понять интуитивный смысл компактности, с ней надо немного поработать. Для начала — несколько простых свойств.

Предложение 21.5. *Пусть X — компактное топологическое пространство и $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Тогда Y компактно.*

Доказательство. Согласно определению индуцированной топологии, задать открытое покрытие множества Y — все равно, что задать такое семейство открытых подмножеств $U_\alpha \subset X$, что $Y \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Добавив к этому семейству открытое множество $X \setminus Y$, получим открытое покрытие X. Ввиду компактности X некоторое конечное подсемейство этого покрытия также покрывает X. Выбросим из этого подсемейства множество $X \setminus Y$, если оно там есть; оставшиеся множества $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ обязаны покрывать Y, что и требовалось. □

Следующее свойство компактных пространств выглядит так.

Предложение 21.6. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, причем X компактно. Тогда подмножество $f(X) \subset Y$ компактно.*

Доказательство. Пусть $f(X) \subset \bigcup U_\alpha$, где все U_α открыты в Y. Тогда $X = \bigcup f^{-1}(U_\alpha)$, где все $f^{-1}(U_\alpha)$ открыты в X ввиду непрерывности f. Так как X компактно, имеем $X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})$ для каких-то $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Отсюда $f(X) \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$, что и требовалось. □

Чуть менее тривиально доказывается следующий факт.

Предложение 21.7. *Пусть X — хаусдорфово пространство и $K \subset X$ — его компактное подмножество. Тогда K замкнуто в X.*

Доказательство. Достаточно показать, что $X \setminus K$ открыто, т. е. что для всякой точки $z \notin K$ существует такое открытое $V \ni x$, что $V \cap K = \varnothing$. Однако же ввиду отделимости X для каждой точки $x \in K$ найдутся такие открытые подмножества $U_x \ni x$ и $V_x \ni z$, что $U_x \cap V_x = \varnothing$. Имеем, очевидно, $K = \bigcup_{x \in K} U_x$; ввиду компактности K имеем $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ для некоторого конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\}$; тогда открытое множество $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ содержит z и не пересекается с K, что и требовалось. □

Из доказанных предложений вытекает следующее конкретное описание компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 21.8. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. «Тогда» следует из предложений 21.4 и 21.5, а «только тогда» — из предложения 21.7 и примера 21.2. □

Из доказанного можно уже вывести конкретное следствие.

Следствие 21.9. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Тогда f достигает на X наибольшего и наименьшего значения.*

Доказательство. Ввиду предложений 21.6 и 21.8, множество $f(X) \subset \mathbb{R}$ ограничено (стало быть, у него есть точная верхняя и точная нижняя грани) и замкнуто (стало быть, его верхняя и нижняя грани принадлежат $f(X)$ и тем самым являются его наибольшим и наименьшим элементами). □

Впрочем, на данный момент, когда практически единственные известные нам примеры компактных пространств — отрезки, это следствие не дает ничего нового по сравнению с теоремой 13.10. Давайте поэтому расширим репертуар известных нам компактных пространств.

Определение 21.10. Пусть X и Y — топологические пространства. *Топологией произведения* на их прямом произведении $X \times Y$ называется топология, определяемая следующим образом: подмножество $W \subset X \times Y$ объявляется открытым, если существуют такие открытые подмножества $U \subset X$ и $V \subset Y$, что $x \in U \times V \subset W$.

Разумеется, надо проверить, что выполнены аксиомы топологического пространства; это нетрудно (и составляет предмет одной из задач листка 15).

Аналогично определяется топология на прямом произведении произвольного конечного числа пространств.

Вообще, *базой открытых множеств* на пространстве X называется семейство его открытых подмножеств, обладающее следующим свойством: всякое открытое множество $U \subset X$ является объединением некоторого (может быть, бесконечного) семейства множеств из базы. В этом смысле можно сказать, что множеств вида $U \times V \subset X \times Y$, где $U \subset X$ и $V \subset Y$ — произвольные открытые подмножества, образует базу открытых подмножеств в $X \times Y$

Проверьте самостоятельно, что топологическое пространство $\mathbb{R}^n$ является произведением n экземпляров пространства $\mathbb{R}$ со стандартной топологией (это также задача из листка 15).

Предложение 21.11. *Пусть X и Y — компактные топологические пространства. Тогда произведение $X \times Y$ также компактно.*

Доказательство. Ясно, что достаточно найти конечное подпокрытие в покрытии пространства $X \times Y$ открытыми подмножествами вида $U_\alpha \times V_\beta$, где U_α — открытое подмножество в X, а V_β — открытое подмножество в Y. Далее, для всякой точки $x \in X$ подмножество $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ естественно отождествляется с Y (паре $(x; y)$ соответствует $y \in Y$); легко видеть, что при этом отождествлении индуцированная с $X \times Y$ топология на $\{x\} \times Y$ переходит в исходную топологию на Y. Возвращаясь к нашему покрытию $X \times Y$ множествами вида $U_\alpha \times V_\beta$, отметим, что, ввиду компактности Y и только что сделанного замечания, для всякой точки $x \in X$ существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $\{x\} \times Y \subset U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \times V_{\beta_n}$. Обозначим через U_x пересечение множеств вида U_{α_i}, содержащих x; тогда $U_x \times Y \subset U_{\alpha_1} \times V_{\beta_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \times V_{\beta_n}$. Поскольку $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, ввиду компактности X существуют такие $x_1, \ldots, x_m$, что $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$. Стало быть, $X \times Y = (U_{x_1} \times Y) \cup \cdots \cup (U_{x_m} \times Y)$; тем самым $X \times Y$ является объединением конечного числа подмножеств, каждое из которых покрыто конечным числом множеств нашего покрытия. Следовательно, само $X \times Y$ также покрывается конечным числом множеств нашего покрытия. $\square$

Доказанное предложение также имеет конкретные следствия. Сначала —

Определение 21.12. *Параллелепипедом* называется множество вида

$$\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \}$$

(подразумевается, что $a_i < b_i$ для всех i).

Легко видеть, что топология на параллелепипеде, индуцированная с $\mathbb{R}^n$, совпадает с произведением топологий на отрезках $[a_1, b_1], \dots [a_n, b_n]$.

Следствие 21.13. *Всякий параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ компактен.* $\square$

Из этого вытекает также такой аналог предложения 21.8.

Следствие 21.14. *Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.* $\square$

По определению, подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если все координаты его точек ограничены (иными словами, если X содержится в некотором параллелепипеде).

Для метрических пространств существует еще одна характеризация компактности. Начнем с такого определения.

Определение 21.15. Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек в топологическом пространстве X и $a \in X$. Точка a называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности $U \ni a$ бесконечно много $n \in \mathbb{N}$, для которых $x_n \in U$.

Легко видеть, что если пространство X метрическое, то это равносильно тому, что существует подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к a: доказательство предложения 9.4 проходит дословно, если заменить модуль разности на расстояние.

Теперь сформулируем условие, которое для метрических пространств окажется эквивалентным компактности.

Определение 21.16. Пространство называется *секвенциально компактным*, если всякая последовательность его точек имеет предельную точку.

Неформально говоря, в секвенциально компактном пространстве последовательность не может быть «всюду разреженной».

Основная теорема о компактных метрических пространствах гласит следующее.

Теорема 21.17. *Метрическое пространство $(X; \rho)$ компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Доказательство. Начнем с более простой части «только тогда». Пусть X компактно. Если ни одна точка $a \in X$ не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, то для всякой $a \in X$ существует такое открытое множество $U_a \ni a$, что $x_n \in U_a$ лишь для конечного числа натуральных чисел n. Ввиду компактности X имеем $X = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}$ для каких-то $a_1, \dots, a_m \in X$, так что $x_n \in X$ лишь для конечного числа натуральных чисел n, что нелепо. (Доказательство в эту сторону проходит и для произвольных топологических пространств.)

Для доказательства «тогда» нам понадобится одна лемма, полезная и сама по себе.

Лемма 21.18 (о лебеговом числе). *Для всякого открытого покрытия секвенциально компактного метрического пространства X существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всякой точки $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ содержится в одном из множеств покрытия.*

Доказательство леммы. Предположим, что искомого «лебегова числа» не нашлось. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in X$, что $B_{1/n}(x_n)$ не содержится ни в одном из множеств покрытия. Ввиду секвенциальной компактности из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Стало быть, существуют такие последовательность точек $y_m \in X$, сходящаяся к точке $y \in X$, и последовательность положительных чисел ε_m, сходящаяся к нулю, что для всякого $m \in \mathbb{N}$ шар $B_{\varepsilon_m}(y_m)$ не содержится ни в одном из множеств покрытия. Приведем эту ситуацию к противоречию.

В самом деле, имеем $y \in U$, где U — какое-то из множеств, входящих в покрытие. Так как U открыто, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(y) \subset U$. Если теперь при всех $m \geqslant N$ имеем $\rho(y_m, y) < \varepsilon/2$ и $|\varepsilon_m| < \varepsilon/2$, то из неравенства треугольника вытекает, что при $m \geqslant N$ имеем $B_{\varepsilon_m}(y_m) \subset B_\varepsilon(y)$. Поскольку $B_\varepsilon(y)$ содержится в U, получаем противоречие с выбором чисел ε_m. $\square$

Теперь можно завершить доказательство теоремы. Итак, пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие секвенциально компактного метрического пространства X; нам нужно выбрать из него конечное подпокрытие. Ввиду леммы существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $x \in X$ шар $B_\varepsilon(x)$ содержится в одном из U_α. Стало быть, достаточно выбрать конечное подпокрытие в покрытии $\bigcup_{x \in X} B_\varepsilon(x) = X$; этим мы сейчас и займемся.

Выберем произвольно точку $x_1 \in X$; если $B_\varepsilon(x_1) = X$, то требуемое подпокрытие (состоящее всего из одного множества) уже найдено; если нет, то возьмем произвольную $x_2 \in X \setminus B_\varepsilon(x_1)$; если $B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \neq X$, то возьмем произвольную $x_3 \in X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$, и т. д. Если этот процесс на каком-то шаге оборвется, мы получим искомое конечное покрытие пространства X множествами вида $B_\varepsilon(x)$; в противном случае мы получаем последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, обладающую тем свойством, что $\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$ при $m \neq n$. Ясно, что ни такая последовательность, ни любая ее подпоследовательность предела иметь не может: если $\rho(y_n, y_{n+k}) \geqslant \varepsilon$ при $k > 0$ и $\lim y_n = y$, то существует такое N, что $\rho(y_n, y) < \varepsilon/2$ при всех $n > N$. Если теперь $n_2 > n_1 > N$, то

$$\rho(y_{n_1}, y_{n_2}) \leqslant \rho(y_{n_1}, y) + \rho(y_{n_2}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

вопреки тому, что расстояния между разными членами последовательности не меньше ε.

Полученное противоречие с секвенциальной компактностью завершает доказательство. □