20. Топологические пространства и пределы

В конце прошлой лекции мы определили метрические пространства. На каждом метрическом пространстве можно естественным способом ввести топологию.

Обозначение 20.1. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ; тогда для точки $x \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ положим

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}.$$

Множество $B_\varepsilon(x)$ называется *открытым шаром* с центром x и радиусом ε.

Определение 20.2. Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если для всякой точки $x \in U$ существует открытый шар с центром в x, содержащийся в U (т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$).

Очевидно, что так определенный набор открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства.

Проверьте самостоятельно, что топология, задаваемая на $\mathbb{R}$ метрикой, совпадает со стандартной топологией.

Покажем для примера, что открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством, и тем самым такое употребление слова «открытый» не является двусмысленным. В самом деле, пусть $y \in B_\varepsilon(x)$; положим $r = \rho(x,y)$ и $\delta = \varepsilon - r > 0$. Тогда $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$: в самом деле, если $z \in B_\delta(y)$, то есть $\rho(y,z) < \delta$, то ввиду неравенства треугольника имеем

$$\rho(z,x) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z) < r + \delta = \varepsilon,$$

то есть $z \in B_\varepsilon(x)$.

Важным примером метрического пространства является пространство $\mathbb{R}^n$. По определению, это множество упорядоченных наборов из n действительных чисел («координат») $(x_1, \ldots, x_n)$; это множество называется *n-мерным координатным пространством* (или просто n-мерным пространством, если не грозит путаница). При $n = 2$ это плоскость, при $n = 3$ — «обычное» (трехмерное) пространство. На $\mathbb{R}^n$ можно ввести (среди прочих) такие метрики.

L^p-метрика: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то положим $\rho_p(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

L^∞-метрика: если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то положим $\rho_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|)$.

Можно сказать еще так. Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определим L^2-*норму* по формуле $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ и L^∞-*норму* по формуле $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Из аксиом метрического пространства неочевидно только неравенство треугольника. Если обозначить через $\|\cdot\|$ любую из указанных норм, то неравенство треугольника вытекает из неравенства

$$\|u + v\| \leqslant \|v\| + \|v\|. \tag{20.1}$$

В самом деле, если неравенство (20.1) установлено, то

$$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Для L^∞-нормы проверка неравенства (20.1) тривиальна. Для L^2-нормы доказательство этого неравенства немного сложнее; вы узнаете его в курсе алгебры.

Различные метрики могут задавать одну и ту же топологию на данном множестве X. Вот важный пример.

Пример 20.3. Все L^2-метрика и L^∞-метрика задают на $\mathbb{R}^n$ одну и ту же топологию.

Доказательство. Легко видеть, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\rho_\infty(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \sqrt{n} \cdot \rho_\infty(x, y).$$

Из этого неравенства вытекает, что для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ и всякого $\varepsilon > 0$ имеем

$$B_{\varepsilon, \rho_2}(x) \subset B_{\varepsilon, \rho_\infty}(x) \subset B_{\varepsilon\sqrt{n}, \rho_2}(x),$$

так что подмножество в $\mathbb{R}^n$ является открытым относительно L^2-метрики, тогда и только тогда, когда оно открыто относительно L^∞-метрики. □

Вот еще одно простое, но фундаментальное определение.

Определение 20.4. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus F \subset X$ открыто.

Следующее утверждение мгновенно вытекает из определения 19.6.

Предложение 20.5. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда:*

1) *Само пространство X и пустое подмножество $\varnothing$ являются замкнутыми множествами.*

2) *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

3) *Объединение двух замкнутых множеств замкнуто.*

Определение 20.6. Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$ — произвольное подмножество. Тогда *замыканием* множества M называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M.

Замыкание множества M обычно обозначается $\bar{M}$. Ввиду пункта (2) предыдущего предложения замыкание любого множества будет замкнуто.

Неформальный смысл понятия замыкания таков: при переходе от множества M к его замыканию $\bar{M}$ мы добавляем к множеству M все те точки x, которые сами в M не лежат, но, тем не менее, «сколь угодно близко от x» точки множества M имеются; если таких точек x не найдется, то множество M является замкнутым.

Точный смысл предыдущему абзацу придает следующее

Предложение 20.7. *Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда $\bar{M}$ состоит из всех точек $x \in X$, обладающих следующим свойством:*

$$\text{Для всякого открытого подмножества } U \ni x \text{ имеем } U \cap M \neq \varnothing. \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть $x \in \bar{M}$; по определению, это равносильно тому, что для всякого замкнутого множества $F \supset M$ имеем $F \ni x$. Поскольку замкнутые множества — это дополнения открытых, последнее условие можно, обозначая $U = X \setminus F$, переписать так: для всякого открытого подмножества $U \subset X$ такого, что $U \cap M = \varnothing$, имеем $U \not\ni x$, или, эквивалентно: если открытое множество U содержит x, то $U \cap M \neq \varnothing$. Но это и есть условие $(*)$. □

Перейдем теперь к общему определению предела.

Определение 20.8. Пусть X — топологическое пространство. Точка $a \in X$ называется *неизолированной*, если всякая окрестность $U \ni a$ содержит точку, отличную от a. В противном случае точка a называется *изолированной*.

По-другому можно сказать так: точка $a \in X$ изолирована тогда и только тогда, когда множество $\{a\}$ открыто.

Определение 20.9. Пусть X и Y — топологические пространства, $a \in X$ — неизолированная точка, и пусть f — отображение из $X \setminus \{a\}$ в Y. Говорят, что точка $b \in Y$ является *пределом f при x, стремящемся к a*, если функция $\tilde{f}\colon X \to Y$, определенная по правилу

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq a; \\ b, & z = a. \end{cases}$$

является непрерывной в точке a. Обозначение: $b = \lim_{x\to a} f(x)$.

Иными словами, $b = \lim_{x\to a} f(x)$, если для всякой окрестности $U \ni b$ существует такая окрестность $V \ni a$, что $f(V \setminus \{a\}) \subset U$.

В эту же схему вписывается и предел последовательности. Именно, положим $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и введем на $\bar{\mathbb{N}}$ топологию, в которой подмножество $U \subset \bar{\mathbb{N}}$ открыто тогда и только тогда, когда оно либо содержит ∞ и все натуральные числа, начиная с некоторого $N \in \mathbb{N}$, либо не содержит ∞.

Последовательность точек $x_n \in X$, где X — топологическое пространство — не что иное, как функция $f\colon \mathbb{N} \to X$, для которой $f(n) = x_n$. Если теперь отождествить $\mathbb{N}$ и $\bar{\mathbb{N}} \setminus \{\infty\}$, то определение 20.9 применимо и к этому случаю, и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, если для всякой окрестности $U \ni x$ существует такое $N > 0$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $x_n \in U$ — в полном согласии с обычным определением предела последовательности. Легко видеть (проверьте!), что в случае, когда X — метрическое пространство, равенство $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ равносильно следующему: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ (это уже совсем похоже на привычное определение предела последовательности!). Определение предела функции при стремлении переменной к $+\infty$ или $-\infty$ аналогичным образом сводится к определению 20.9 с помощью пространства $\bar{\mathbb{R}}$ из предыдущей лекции.

Как известно, если предел числовой последовательности или функции существует, то он единствен. Для наших общих определений аналогичный факт верен не всегда (глупый пример: если в топологическом пространстве X открытыми являются только пустое множество и все X — что аксиомами топологического пространства не запрещено, — то всякая точка $x \in X$ будет пределом всякого отображения в X). Чтобы отсечь такую патологию, введем следующий важный класс топологических пространств.

Определение 20.10. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют такие открытые подмножества $U \ni x$ и $V \ni y$, что $U \cap V = \varnothing$.

Сразу же заметим, что всякое метрическое пространство хаусдорфово: в качестве открытых множеств $U \ni x$ и $V \ni y$ можно взять открытые шары $B_{d/2}(x)$ и $B_{d/2}(y)$, где d — расстояние между x и y (то, что они не пересекаются, следует из неравенства треугольника).

Все топологические пространства, с которыми мы будем иметь дело в курсе, будут хаусдорфовыми. Нехаусдорфовы пространства в жизни тоже встречаются (например, они существенно используются в алгебраической геометрии).

Предложение 20.11. *Пусть X и Y — топологические пространства; предположим, что пространство Y хаусдорфово. Тогда для всякого отображения $f\colon X \setminus \{a\} \to Y$ предел $\lim_{x\to a} f(x)$ единствен (если он существует).*

Доказательство. Пусть, от противного, пределами $f(x)$ при x, стремящемся к a, будут две разные точки b_1 и b_2. Поскольку Y хаусдорфово, в нем существуют непересекающиеся открытые множества $V_1 \ni b_1$ и $V_2 \ni b_2$. Согласно определению предела, в пространстве X существуют такие открытые подмножества U_1 и U_2, содержащие a, что $f(U_1 \setminus \{a\}) \subset V_1$ и $f(U_2 \setminus \{a\}) \subset V_2$. Так как точка a неизолирована, открытое множество $U_1 \cap U_2$ содержит по крайней мере одну точку $a' \neq a$. Тогда $f(a') \in V_1 \cap V_2$, что противоречит тому, что V_1 и V_2 не пересекаются. $\square$