2. Множества

Эта и следующая лекция будут посвящены теоретико-множественному языку, которым пользуются все математики.

Множество — «начальное» математическое понятие, и потому этому понятию невозможно дать формального определения. Множества состоят из *элементов*; если элемент x принадлежит множеству A, то это обозначают так: $x \in A$ (или $A \ni x$). Если же x *не* принадлежит множеству A, то пишут $x \notin A$.

Два множества A и B равны тогда и только тогда, когда они состоят из тех же элементов (подробнее: всякий элемент множества A является элементом множества B и всякий элемент множества B является элементом множества A).

Множества обычно обозначают буквами. Например, множество действительных чисел обычно обозначают $\mathbb{R}$, множество рациональных чисел обычно обозначают $\mathbb{Q}$, множество целых чисел обычно обозначают $\mathbb{Z}$, множество натуральных чисел обычно обозначают $\mathbb{N}$.

Множества можно задавать, перечислив его элементы (если это возможно). В этом случае перечисляемые элементы принято записывать в фигурных скобках. Например, множество $\{2, 3, -\sqrt{2}\}$ состоит из трех элементов: числа 2, числа 3 и числа $-\sqrt{2}$. Можно не указывать в фигурных скобках полный список, если из контекста понятно, что именно должно входить в множество. Например, $\{1, 2, \ldots, 99\}$ — множество всех натуральных чисел, не превосходящих 99.

Можно также задавать множество как множество элементов, удовлетворяющих определенному условию. Записывается это как в следующем примере:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.$$

Это множество всех действительных чисел, больших трех; как известно, по-другому оно обозначается $(3; +\infty)$.

Наряду с прочими, рассматривается множество, не содержащее *ни одного элемента*; оно обозначается $\varnothing$ и называется *пустым множеством.*[1] Если всякий элемент множества A является элементом множества B, то это обозначается так: $A \subset B$ (или $B \supset A$); в этом случае говорят, что A является *подмножеством* в B. Пустое множество является подмножеством любого множества (объяснение: если бы включение $\varnothing \subset A$ не выполнялось, то в пустом множестве нашелся бы хотя бы один

[1] Хотя оно и пустое, но при формальном построении теории множеств все в некотором смысле строится именно из него.

элемент, не лежащий в A — но в пустом множестве никаких элементов нет!).[2]

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, лежащих в A или в B (или в обоих множествах одновременно — такое тоже не запрещается). Обозначение: $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, лежащих в A и B одновременно. Обозначение: $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, лежащих в A, но не лежащих в B. Обозначение: $A \setminus B$.

В листках мы рассмотрим различные свойства операций над множествами.

Еще одна важная операция над множествами, о которой в школе обычно не рассказывают, называется *декартовым произведением* (или *прямым произведением*). По определению, прямым произведением множеств x и y называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар[3] $(x; y)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Прямое произведение множеств X и Y обозначается $X \times Y$. Например, прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ можно известным способом отождествить с плоскостью.

Сравнение мощностей

Пусть даны два множества A и B; как выяснить, в каком из них больше элементов? Если множества *конечны* (состоят из конечного числа элементов), то можно эти элементы просто пересчитать. В общем случае пользуются таким определением.

Определение 2.1. Говорят, что множества A и B *равномощны*, если между ними существует *биекция* или *взаимно однозначное соответствие*. Это означает, что существует отображение $f\colon A \to B$, обладающее следующими свойствами:

– если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$;

– для всякого элемента $y \in B$ существует (единственный ввиду предыдущего условия) элемент $x \in A$, для которого $f(x) = y$.

Если множества A и B равномощны, мы будем обозначать это обстоятельство так: $A \approx B$. Два конечных множества равномощны тогда

[2] В некоторых текстах отношение «A является подмножеством в B» записывают как $A \subseteq B$, а обозначение $A \subset B$ резервируют для случая, когда A содержится в B и не совпадает с ним.

[3] По определению, упорядоченные пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$.

и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов. Вот пример с бесконечными множествами.

Пример 2.2. Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ равномощны. В самом деле, биекцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ можно организовать следующим образом:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5...

Иными словами,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1-n}{2}, & n \text{ нечетно}, \\ \frac{n}{2}, & n \text{ четно}. \end{cases}$$

Итак, в отличие от ситуации с конечными множествами, мы видим, что в $\mathbb{Z}$ есть подмножество (а именно, $\mathbb{N}$), не совпадающее с ним, но ему равномощное. На самом деле так бывает с любым конечным множеством.

Предложение 2.3. *Всякое бесконечное множество X содержит подмножество Y, не совпадающее с X, но равномощное ему.*

Доказательство. Раз X бесконечно, оно непусто. Значит, существует по крайней мере один элемент $x_1 \in X$. Поскольку X бесконечно, $X \neq \{x_1\}$, так что в X существует элемент $x_2 \neq X_1$, и т. д. В итоге получится последовательность $\{x_n\}$, состоящая из попарно различных элементов множества X. Положим теперь $Y = X \setminus \{x_1\}$; тогда биекция $f\colon X \to Y$ строится так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ отлично от всех } x_n; \\ x_{n+1}, & \text{если } x = x_n \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

□

Определение 2.4. Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется *счетным.*

Если $f\colon \mathbb{N} \to X$ — биекция, то, полагая $x_n = f(n)$, получим такое равносильное определение счетного множества: множество счетно, если *все* его элементы можно расположить в последовательность $x_1, x_2, \ldots$ — «пересчитать».

Пример 2.2 показывает, что множество $\mathbb{Z}$ счетно. Вот менее бросающийся в глаза пример.

Предложение 2.5. *Множество* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *счетно.*

Доказательство. Для всякой пары натуральных чисел (p, q) имеем $p + q \geqslant 2$, и для каждого натурального числа n количество пар (p, q), для которых $p + q = n$, конечно. Теперь можно пересчитать все пары натуральных чисел (p, q) таким образом: сначала все пары, для которых $p + q = 2$, затем все пары, для которых $p + q = 3$, затем все пары, для которых $p + q = 4$, и т. д. Так как на каждом шаге добавляется только конечное число членов последовательности, наше построение корректно. □

Следствие 2.6. *Множество* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *счетно.*

Доказательство. Если $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ — какая-нибудь биекция (существующая ввиду предложения 2.2) и $n \mapsto (p_n, q_n)$ — биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то биекцию между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ можно задать по правилу $n \mapsto (f(p_n), f(q_n))$. □

Аналогично показывается, что если $A \approx A'$ и $B \approx B'$, то $A \times B \approx A' \times B'$.

Вот еще одно очень полезное (и на первый взгляд неожиданное) следствие предложения 2.5.

Следствие 2.7. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Ввиду следствия 2.6 существует последовательность пар (u_n, v_n), включающая в себя все пары целых чисел. Будем по ней строить последовательность всех рациональных чисел следующим образом: паре (u_n, v_n) поставим в соответствие число u_n/v_n; если $v_n = 0$ или если число, равное u_n/v_n, нам уже встречалось, то соответствующую пару будем пропускать. В итоге все рациональные числа окажутся организованными в последовательность без повторений. □

Вот еще один типичный пример счетного множества. Рассмотрим некоторое конечное множество S; будем называть его *алфавитом*. *Словом* над алфавитом S называется произвольная конечная последовательность элементов множества S.

Предложение 2.8. *Множество слов над конечным алфавитом* S *счетно.*

Доказательство. Для каждого натурального k множество слов длины k конечно, так как конечен алфавит. Имея это в виду, можно организовать все конечные слова в последовательность таким образом: сначала перечислить все слова длины 1, затем все слова длины 2, и т. д. □

На самом деле можно показать, что счетно и множество всех конечных слов над счетным алфавитом (см. задачу 7 второго листка).

Разобранные примеры могли создать впечатление, что все бесконечные множества счетны. На самом деле это совершенно не так: разные бесконечные множества могут быть бесконечны по-разному, и очень по-разному. Вот первый и очень важный пример.

Предложение 2.9. *Множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц несчетно.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что бесконечные последовательности из нулей и единиц удалось организовать в последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, в которой встречаются все последовательности, и покажем, что такое допущение ведет к противоречию.

В самом деле, построим последовательность s следующим образом. Первый ее элемент выберем отличным от первого элемента последовательности s_1 (если s_1 начинается с нуля, то s начинается с единицы, если s_1 начинается с единицы, то s начинается с нуля). Второй ее элемент выберем отличным от второго элемента последовательности s_2, третий — отличным от третьего элемента последовательности s_3, и т. д. Построенная таким образом последовательность s с неизбежностью отлична от каждой из s_k: она отлична от s_1 по крайней мере в первом элементе, она отлична от s_2 по крайней мере во втором элементе, и т. д. Мы получили искомое противоречие. □

Определение 2.10. Множества, равномощные множеству бесконечных последовательностей из нулей и единиц, называются *множествами мощности континуум.*

Предложение 2.11. *Интервал* $(0;1)$ *имеет мощность континуум.*

Доказательство. Всякому действительному числу из интервала $(0;1)$ можно поставить в соответствие бесконечную последовательность десятичных цифр, т. е. элементов множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$ — знаков после запятой в его десятичном разложении (считаем, что конечная десятичная дробь заканчивается на бесконечный «хвост» из нулей). Обозначим множество всевозможных бесконечных последовательностей десятичных цифр через D, а множество всевозможных бесконечных последовательностей из нулей и единиц — через C.

Покажем сначала, что множество D имеет мощность континуум. Для этого построим биекцию $f\colon D \to C$ следующим образом. Чтобы построить последовательность нулей и единиц $f(\sigma)$, соответствующую последовательности десятичных цифр σ, заменим каждую десятичную цифру на последовательность из нулей и единиц так, как показано в таблице:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	110	111)	11110	111110	1111110	11111110	111111110	111111111

Так как всякая последовательность нулей и единиц начинается либо с нуля, либо с некоторого количества (от 1 до 8) подряд стоящих единиц, за которыми следует нуль, либо, наконец, с девяти подряд стоящих единиц, ясно, по всякой последовательности нулей и единиц можно, притом единственным образом, восстановить соответствующую ей последовательность десятичных цифр, так что f является биекцией. (С такого рода «префиксным колом» мы еще встретимся.)

Чтобы завершить доказательство, нам достаточно построить биекцию между D и интервалом $(0;1)$. Начнем с леммы.

Лемма 2.12. *Если D — несчетное множество и $Z \subset D$ — счетное множество, то $D \setminus Z$ равномощно D.*

Доказательство леммы. Так как объединение счетного и конечного множества, очевидно, счетно (можно пересчитать сначала конечное множество, а затем счетное), а множество D несчетно, разность $D \setminus Z$ бесконечна. Следовательно, как и в доказательстве предложения 2.3, можно найти счетное подмножество $Z_1 \subset D \setminus Z$. Так как Z и Z_1 — счетные множества, очевидно, что существует биекция $\varphi\colon Z \cup Z_1 \to Z_1$ (ср. пример 2.2). Теперь биекцию $g\colon D \to D \setminus Z$ можно построить так:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \notin Z \cup Z_1, \\ g(x), & x \in Z \cup Z_1. \end{cases}$$

$\square$

Заметим теперь, что интервал $(0;1)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством последовательностей десятичных цифр (знаков после запятой в десятичном разложении), не имеющих «хвоста» из девяток и не состоящих из одних нулей. Обозначим множество элементов D, заканчивающихся на хвост из девяток или состоящих из одних нулей, через Z. Тогда Z счетно (в последовательности можно сначала поставить последовательность из одних нулей, затем — последовательность из одних девяток, затем — последовательности с одной не-девяткой перед хвостом из девяток...), а D несчетно (оно, как мы доказали, равномощно C), лемма показывает, что $D\mathbb{Z}$ равномощно D. Поскольку имеется естественная биекция между $D \setminus Z$ и $(0;1)$, все доказано. $\square$

Следствие 2.13. *Множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.*

Доказательство. Отображение $x \mapsto 2x-1$ задает биекцию между $(0;1)$ и $(-1;1)$, а отображение

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \geqslant 0, \\ -\frac{x}{x+1}, & x < 0 \end{cases}$$

задает биекцию между $(-1;1)$ и $\mathbb{R}$. $\square$