19. Еще о лемме Цорна; топологические пространства

Как мы и обещали, приведем еще одно приложение леммы Цорна, на сей раз более близкое к анализу. Именно, речь пойдет о функциях $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающих следующим свойством: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Ясно, что для всякого $a \in \mathbb{R}$ функция $x \mapsto ax$ этим свойством обладает. Оказывается, однако, что существует масса других функций с этим свойством.

Предложение 19.1. *Существует функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$, не имеющая вида $x \mapsto ax$.*

Доказательство. Начнем доказательство со следующего замечания. Поле действительных чисел $\mathbb{R}$ является векторным пространством (бесконечномерным) над своим подполем $\mathbb{Q}$ (сложение действительных чисел и умножение рационального числа на действительное определяются обычным образом). Основная часть доказательства предложения будет состоять в доказательстве существования базиса этого векторного пространства. Слова «векторное пространство» использоваться далее не будут, но все сказанное ниже будет без всяких изменений применимо к любому векторному пространству над любым полем.

Определение 19.2. Подмножество $S \subset \mathbb{R}$ называется *линейно независимым над* $\mathbb{Q}$ (в дальнейшем слова «над $\mathbb{Q}$ » будут опускаться), если оно удовлетворяет следующему условию. Для любого конечного набора элементов $x_1, \ldots, x_n \in S$ из равенства $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n = 0$, где $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$, вытекает, что $r_1 = \ldots = r_n = 0$.

Предложение 19.3. *Существует линейно независимое подмножество $S \subset \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: если $S' \supseteq S$ и S' линейно независимо, то $S' = S$.*

Определение 19.4. Подмножество в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям предложения 19.3, называется *базисом* в $\mathbb{R}$.

Иными словами, базис — это максимальное (по включению) линейно независимое подмножество.

Доказательство предложения 19.3. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех линейно независимых подмножеств в $\mathbb{R}$. Множество $\mathcal{S}$ частично упорядочено отношением включения, и нам надо доказать существование максимального элемента в $\mathcal{S}$. Для этого достаточно проверить, что

$\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна; проверим эти условия. Пусть $\{S_\alpha\}$ — линейно упорядоченное семейство линейно независимых подмножеств в $\mathbb{R}$. Покажем, что множество $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$ также линейно независимо — тогда, очевидно, $S \in \mathcal{S}$ будет верхней гранью семейства $\{S_\alpha\}$ и доказательство будет завершено. Пусть, стало быть, $x_1, \ldots, x_n \in S$ и $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n = 0$, где $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$; имеем $x_j \in S_{\alpha_j}$. В силу линейной упорядоченности семейства $\{S_\alpha\}$ найдется такое k, что $S_{\alpha_k} \supseteq S_{\alpha_j}$ для всех j; стало быть, $x_m \in S_{\alpha_k}$ для всех m. Так как множество S_{α_k} линейно независимо, из равенства $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n = 0$ вытекает, что $r_1 = \ldots = r_n = 0$. Этим доказана линейная независимость множества S. Доказательство закончено. $\square$

Предложение 19.5. *Пусть S — базис $\mathbb{R}$. Тогда всякое число $x \in \mathbb{R}$ единственным образом представляется в виде $\sum_{s\in S} r_s \cdot s$, где все r_s лежат в $\mathbb{Q}$ и все r_s, кроме, возможно, конечного числа, равны нулю.*

Доказательство. Если $x = \sum_{s\in S} r_s \cdot s = \sum_{s\in S} r'_s \cdot s$, то $\sum_{s\in S}(r_s - r'_s)s = 0$, и из линейной независимости получаем, что $r'_s - r_s = 0$ при всех s. Этим доказана единственность.

Для доказательства существования рассмотрим произвольный $x \in S$. Если $x \in S$, то доказывать нечего; если $x \notin S$, то заметим, что множество $S \cup \{x\}$ обязано быть линейно зависимым ввиду максимальности S. Следовательно, имеем

$$\sum_{s\in S} r_s \cdot s + r_x \cdot x = 0$$

для некоторых $r_s, r_x \in \mathbb{Q}$ ($r_s = 0$ для всех s, кроме конечного числа, не все коэффициенты r_s и r_x равны нулю). Заметим, что $r_x \neq 0$ — в противном случае получилось бы, что множество S линейно зависимо; стало быть,

$$x = -\sum_{s\in S} \frac{r_s}{r_x} \cdot s,$$

и существование разложения доказано. $\square$

Теперь зафиксируем какой-нибудь базис S и какой-нибудь элемент $s \in S$ и положим

$$f(x) = r_s, \qquad \text{где } x = \sum_{s\in S} r_s \cdot s.$$

Тождество $f(x+y) = f(x) + f(y)$ очевидно из утверждения о единственности в предложении 19.5; далее, $f(s) = 1$ и $f(0) = 0$, так что функция f

непостоянна; наконец, f не имеет вида $x \mapsto ax$, так как она принимает только рациональные значения. $\square$

Перейдем теперь к топологическим пространствам.

Определение 19.6. *Топологическим пространством* называется множество X, в котором выделено семейство подмножеств, называемых *открытыми*, удовлетворяющее следующим условиям:

1) Само пространство X и пустое подмножество $\varnothing$ являются открытыми множествами.

2) Объединение любого семейства открытых множеств открыто.

3) Пересечение двух открытых множеств открыто.

Начнем с того, что введем топологию на самом множестве $\mathbb{R}$.

Пример 19.7 (стандартная топология на $\mathbb{R}$)**.** Назовем подмножество $U \subset \mathbb{R}$ открытым, если для каждой точки $x \in U$ существует такой интервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$, что $x \in (a; b)$ и $(a; b) \subseteq U$.

Неформально говоря, множество открыто, если вместе с каждой точкой оно обязательно содержит и все достаточно близкие к ней. Проверьте самостоятельно, что при таком определении открытых множеств аксиомы 1–3 топологического пространства действительно выполнены.

Вот другой пример топологического пространства.

Пример 19.8 (дискретная топология)**.** Пусть X — произвольное множество. Объявим *все* его подмножества открытыми. Тогда, очевидно, аксиомы топологического пространства будут выполнены. Такое топологическое пространство называется *пространством с дискретной топологией.*

Ввиду аксиомы 2 топологических пространств, для дискретности пространства достаточно, чтобы все его одноточечные подмножества были открыты.

Сами по себе дискретные топологии неинтересны, но такое топологическое пространство может возникнуть в результате проведения какой-то конструкции, и вот на этот случай полезно иметь для него специальный термин.

Вот еще один пример. Положим $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ и введем топологию на $\bar{\mathbb{R}}$ следующим образом. Если подмножество $U \subset \mathbb{R}$ содержится в $\mathbb{R}$, то оно открыто тогда и только тогда, когда оно открыто как подмножество в $\mathbb{R}$. В противном случае U открыто тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(1) $U \cap \mathbb{R}$ открыто как подмножество в $\mathbb{R}$;

(2) если $U \ni +\infty$, то $U \supseteq (a; +\infty)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$; если $U \ni -\infty$, то $U \supseteq (-\infty; b)$ для некоторого $b \in \mathbb{R}$.

Проверка аксиом топологического пространства опять оставляется в качестве упражнения.

Если на множестве X задана топология, то она задана и на всяком его подмножестве.

Определение 19.9. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество. Введем на Y топологию, объявив его открытыми подмножествами все множества вида $U \cap Y$, где U — открытое подмножество пространства X. Получающаяся топология называется топологией на Y, *индуцированной* топологией на X.

Тривиально проверяется, что набор подмножеств в Y, построенный в соответствии с этим определением, удовлетворяет аксиомам открытых множеств топологического пространства. В частности, снабженным топологией оказывается любое подмножество в $\mathbb{R}$.

Например, стандартная топология на $\mathbb{R}$ индуцирует на $\mathbb{Z}$ дискретную топологию.

Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью* точки x.

Понятие окрестности используется в общем определении непрерывности.

Определение 19.10. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Отображение f называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для всякой окрестности $V \ni f(x)$ существует такая окрестность $U \ni x$, что $f(U) \subset V$.

Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Покажем, что наше общее определение непрерывности согласуется с определением 11.5.

Предложение 19.11. *Отображение $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ непрерывно в точке $x \in [a; b]$ в смысле определения 11.5 тогда и только тогда, когда оно* *непрерывно в этой точке в смысле определения 19.10 (на $\mathbb{R}$ рассматривается естественная топология, на $[a;b]$ — топология, индуцированная с $\mathbb{R}$).*

Доказательство. Пусть f непрерывно в точке x в смысле определения 11.5. Если $U \ni f(x)$ — открытое множество, то существует интервал $(p;q) \ni f(x)$, содержащийся в U. Следовательно, существует $\varepsilon > 0$, для которого $(f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon) \subseteq (p;q)$. Значит, существует и такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x' - x| < \delta$ вытекает $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Положим $V = (x - \delta; x - \delta)$, если x не совпадает ни с одним из концов отрезка, и положим $V = [a; a + \delta)$ или $V = (b - \delta; b]$, если $x = a$ или b. В любом случае V открыто в $[a;b]$ и $f(V) \subseteq (f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon) \subseteq U$. Тем самым f непрерывно в x в смысле определения 19.10.

Обратно, пусть f непрерывно в x в смысле определения 19.10. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ множество $(f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon)$ открыто в $\mathbb{R}$; следовательно, множество

$$V = \{t \in [a;b] \mid |f(t) - f(x)| < \varepsilon\}$$

также открыто, то есть содержит множество $\{t \in [a;b] \mid |t - x| < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$. Это и означает, что f непрерывна в смысле определения 11.5. $\square$

У непрерывных отображений есть очень простая характеризация.

Предложение 19.12. *Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для всякого открытого подмножества $U \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(U) \subset X$ также открыт.*

Доказательство. «Только тогда»: пусть $U \subset Y$ открыто, и пусть $x \in f^{-1}(U)$. Так как f непрерывна в точке x, согласно определению 19.10 найдется такое открытое подмножество $V_x \subset X$, что $V_x \ni x$ и $f(V_x) \subset U$ — иными словами, $V_x \subset f^{-1}(U)$. Стало быть, множество $f^{-1}(U)$ вместе с каждой точкой x содержит ее окрестность V_x и тем самым открыто.

«Тогда»: пусть прообразы всех открытых множеств открыты; чтобы показать, что f непрерывна в каждой точке $x \in X$, достаточно заметить, что если $U \ni f(x)$ открыто, то множество $V = f^{-1}(U)$ открыто, содержит x, и $f(V) \subset U$. $\square$

Следствие 19.13. *Если X, Y и Z — топологические пространства, а $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения, то композиция $g \circ f\colon X \to Z$ также непрерывна.*

Доказательство. Для всякого открытого $U \subset Z$ множество $g^{-1}(U)$ открыто в Y ввиду непрерывности g, и тогда множество $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ открыто в X ввиду непрерывности f. $\square$

Много разумных примеров топологических пространств получается из следующей конструкции.

Определение 19.14. *Метрическим пространством* называется множество X, на парах точек которого задана функция ρ (с вещественными значениями), удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ для любых x и y, и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Величина $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между x и y, а сама функция ρ часто называется *метрикой*.

Пример метрического пространства — множество $\mathbb{R}$, в котором метрика задана формулой $\rho(x, y) = |x-y|$. Другой пример — пространство (или плоскость), в котором ρ — обычное расстояние между точками. В этих примерах аксиома 3 сводится к обычному «неравенству треугольника»; в общем случае ее тоже называют неравенством треугольника.

Коль скоро X — метрическое пространство, на любом подмножестве $Y \subset X$ функция ρ также индуцирует метрику, так что любое подмножество метрического пространства автоматически является метрическим пространством.