18. Отображения, отношения и лемма Цорна

Вернемся еще раз к теории множеств — будем надеяться, что последний раз в курсе анализа.

Вы уже знакомы с понятием отображения множеств. Именно, отображение $f\colon X \to Y$ *каждому* элементу $x \in X$ ставит в соответствие *единственный* элемент $f(x) \in Y$. Если $f\colon X \to Y$, то всякому подмножеству $A \subset X$ можно поставить в соответствие подмножество $f(A) \subset Y$, называемое *образом* множества A относительно f; по определению, $f(A)$ состоит из элементов $f(x)$ для всех $x \in A$.

Кроме того, в тех же условиях всякому подмножеству $A \subseteq Y$ можно поставить в соответствие подмножество $f^{-1}(A) \subseteq X$, называемое *прообразом*, или *обратным образом* множества A относительно f; по определению,

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Обсудим, как связаны операции образа и обратного образа с операциями над множествами. С обратным образом все совсем просто.

Предложение 18.1. *Если $f\colon X \to Y$ — отображение и $A, B \subseteq Y$, то:*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B);$$
$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B);$$

Как говорят, обратный образ *коммутирует* с объединениями, пересечениями и разностями.

Доказательство совершенно очевидно. Первые два тождества верны и для бесконечных сумм и пересечений.

С образом дело обстоит немного хитрее. Во-первых, с объединениями образ также коммутирует.

Предложение 18.2. *Если $f\colon X \to Y$ — отображение и $A, B \subseteq X$, то $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; аналогичное утверждение верно для бесконечных объединений.*

В случае с пересечениями и разностями мы можем гарантировать только наличие включений:

Предложение 18.3. *Если $f\colon X \to Y$ — отображение и $A, B \subseteq X$, то:*

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B);$$
$$f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B).$$

Доказательства также тривиальны, но важно сознавать, почему включения здесь невозможно заменить на равенства. Пусть, например, мы пытаемся установить, что $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$; если $y \in f(A) \cap f(B)$, то $y = f(x_1)$, где $x_1 \in A$, и одновременно $y = f(x_2)$, где $x_2 \in B$; Если бы мы могли быть уверены, что $x_1 = x_2$, то из этого бы вытекало, что $y \in f(A \cap B)$, но гарантировать такого равенства мы, конечно, никак не можем. Разберитесь самостоятельно, что происходит с разностью.

Из нашего обсуждения имеется одно следствие, которое стоит отметить отдельно.

Предложение 18.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение и $A, B \subseteq X$; если отображение f инъективно, т. е. если выполнено условие*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

то $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ и $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

С отображениями множеств связано следующее важное понятие.

Определение 18.5. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множеств. *Графиком* этого отображения называется множество

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Следующее предложение очевидно, но важно.

Предложение 18.6. *Пусть X и Y — произвольные множества. Подмножество $\Gamma \subset X \times Y$ является графиком некоторого отображения из X в Y тогда и только тогда, когда для всякого $x \in X$ существует и единствен $y \in Y$, для которого $(x, y) \in \Gamma$.*

Доказательство очевидно (тот y, для которого $(x, y) \in \Gamma$, принимаем за $f(x)$).

В связи с предложением 18.6 заметим, что теперь нет нужды в отдельном неопределяемом понятии «отображение». В самом деле, можно *определить* отображение из X в Y как подмножество $\Gamma \subset X \times Y$, удовлетворяющее условиям предложения 18.6; тогда фраза, следующая непосредственно за формулировкой предложения, показывает, как для всякого $x \in X$ однозначно определить его образ, а больше ничего для отображения и не надо! Именно так при более формальном построении теории множеств и поступают: отождествляют отображения с их графиками. Содержательно, тем не менее, мы будем эти вещи различать (как все и делают).

В определении декартова произведения множеств участвует еще термин «упорядоченная пара». Упорядоченную пару также можно не считать неопределяемым понятием, а определить в терминах множеств. Именно, для любых двух a и b можно положить

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

(в правой части стоит множество из двух (если $a \neq b$) или одного (если $a = b$) элемента). При желании вы можете проверить самостоятельно, что $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ (ровно этого мы и хотим от упорядоченных пар). Подробности см. в книге: Н. К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 2008 (и более ранние издания).

Обобщая понятие отображения, получаем важное общее понятие *отношения*. По определению, отношением на множестве X называют подмножество $R \subseteq X \times X$ (никаких дополнительных условий на R не накладывается). Когда речь идет об отношениях, принято вместо $(x, y) \in R$ писать xRy. Типичный пример — отношение «меньше» на множестве R, которое можно рассматривать как подмножество

$$< \; = \{(x, y) \in R \mid x < y\}$$

(в правой части символ $<$ употреблен в обычном смысле).

Про отношения в общем случае ничего особенно интересного сказать, пожалуй, нельзя; в математике важны некоторые частные классы отношений.

Отношения эквивалентности

Отношение R на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

xRx для всех $x \in X$	(рефлексивность);
$xRy \Rightarrow yRx$ для всех $x, y \in X$	(симметричность);
если xRy и yRz, то xRz	(транзитивность).

Тривиальный пример отношения эквивалентности (на любом множестве) — равенство. В процессе изучения математики вы очень много раз будете встречаться и с другими примерами отношений эквивалентности; некоторые такие примеры вам уже известны. Например, отношение на $\mathbb{Z}$ «быть сравнимым по модулю 2009» — отношение эквивалентности (более формально: $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда $x \equiv y$

$(\mathrm{mod}\ 2009)$). Другой пример — отношение эквивалентности на множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел (последовательности эквивалентны, если их разность стремится к нулю), использованное нами при построении действительных чисел.

Основное свойство отношений эквивалентности содержится в следующем предложении.

Предложение 18.7. *Для всякого отношения эквивалентности R на множестве X существует представление X в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств, называемых* классами эквивалентности*, обладающее следующим свойством: если $x, y \in X$, то xRy тогда и только тогда, когда x и y лежат в одном классе эквивалентности.*

Доказательство предоставляется читателю.

Если отношение эквивалентности — равенство, то классы эквивалентности суть все одноэлементные подмножества. Для сравнимости по модулю 2009 классы эквивалентности суть классы вычетов по модулю 2009, а для отношения эквивалентности на множестве фундаментальных последовательностей классы эквивалентности суть действительные числа.

Отношения порядка и лемма Цорна

Определение 18.8. Отношение $\prec$ на множестве X называется *отношением частичного порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и обладает следующим свойством:

$$\text{если } x \prec y \text{ и } y \prec x, \text{ то } x = y.$$

Пусть, например, $X = 2^A$, где A — произвольное множество. Тогда отношение $\subseteq$ является отношением частичного порядка; отношением частичного порядка на том же множестве является и $\supseteq$. Другой пример частичного порядка — отношение «a делит b» на множестве $\mathbb{N}$. Наконец, обычное отношение $\leqslant$ на множестве $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}$ также, конечно, является частичным порядком.

Определение 18.9. Отношение $\prec$ на множестве X называется *отношением линейного порядка*, если оно является отношением частичного порядка и, кроме того, удовлетворяет следующему условию:

$$\text{для любых } x, y \in X \text{ имеем } x \prec y \text{ или } y \prec x.$$

В перечисленных выше примерах отношением линейного порядка является только $\leqslant$ (а также $\subseteq$ на множестве подмножеств пустого или одноэлементного множества).

Множество, на котором задано отношение частичного (соответственно линейного) порядка, называется *частично* (соответственно линейно) *упорядоченным*.

Определение 18.10. Пусть X — множество, частично упорядоченное отношением $\prec$, и пусть $Y \subseteq X$. Говорят, что элемент $a \in X$ является *верхней гранью* множества Y, если выполнены следующие условия:
(1) $y \prec a$ для всех $y \in Y$;
(2) если $y \prec b$ для всех $b \in Y$, то $a \prec b$.

Верхняя грань множества Y обозначается $\sup Y$.

Например, если $X = 2^A$, частично упорядоченное отношением $\subseteq$, то верхняя грань подмножества в X (то есть семейства подмножеств в A) есть не что иное, как объединение этого семейства. Если X — это множество натуральных чисел, частично упорядоченное отношением делимости, то верхняя грань двухэлементного множества $\{m, n\}$ — наименьшее общее кратное чисел m и n. Наконец, если $X = \mathbb{R}$, упорядоченное отношением $\leqslant$, то верхняя грань в смысле определения 18.10 — то же, что привычная нам верхняя грань.

Определение 18.11. Пусть X — множество, частично упорядоченное отношением $\prec$. Элемент $a \in X$ называется *максимальным* в X, если не существует элемента $x \in X$, для которого $a \prec x$ и $a \neq x$.

Иными словами, максимальный элемент — это не «тот, что больше всех», а «тот, больше которого нету». Если максимальный элемент существует, он не обязан быть единственным. Например, в множестве $\{2, 3, 12, 18\}$, частично упорядоченном отношением делимости, максимальным элементом будет и 12, и 18 (а «наибольшего») элемента при этом нет.

Теперь мы можем сформулировать лемму Цорна.

Предложение 18.12 (лемма Цорна). *Пусть X — множество, частично упорядоченное отношением $\prec$. Предположим, что выполняется следующее условие.*

> *У всякого подмножества $Y \subset X$, линейно упорядоченного тем же отношением $\prec$, существует верхняя грань.*

Тогда в множестве X существует хотя бы один максимальный элемент.

В нашем изложении мы будем рассматривать лемму Цорна как одну из аксиом теории множеств (так — явно или неявно — поступает и большинство математиков). При более формальном построении теории множеств лемму Цорна за аксиому не принимают, но выводят из аксиом с более краткой формулировкой; как это делается, можно узнать из цитированной книги Верещагина и Шеня.

Неформально лемму Цорна можно объяснить так. Пусть пара $(X, \prec)$ удовлетворяет ее условиям; выберем какой-нибудь элемент $x_1 \in X$. Если он уже максимален, то доказывать нечего; в противном случае найдется такой элемент x_2, что $x_1 \underset{\neq}{\prec} x_2$. Если x_2 максимален, то все в порядке, в противном случае найдется такой x_3, что $x_2 \underset{\neq}{\prec} x_3$, и т. д. Если за конечное число шагов до максимального элемента мы не дошли, то у нас получится бесконечная цепочка

$$x_1 \underset{\neq}{\prec} x_2 \underset{\neq}{\prec} \dots \underset{\neq}{\prec} x_n \underset{\neq}{\prec} \dots$$

Поскольку подмножество $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ линейно упорядочено отношением $\prec$, существует элемент $y_1 = \sup Y$. Если y_1 — максимальный элемент в X, то все в порядке, в противном случае существует y_2, для которого $y_1 \underset{\neq}{\prec} y_2$, и т. д., пока не дойдем до максимального элемента. Лемма Цорна утверждает законность этого «и. т. д.» (подразумевающего сколь угодно далекие бесконечные итерации описанной выше процедуры).

Приведем два типичных примера использования леммы Цорна. Наш первый пример относится к «чистой» теории множеств. Напомним, что если X и Y — два множества, то пишем $|X| \leqslant |Y|$ («мощность X не превосходит мощности Y»), если существует биекция между X и некоторым подмножеством в Y.

Предложение 18.13. *Для любых двух множеств X и Y имеем $|X| \leqslant |Y|$ или $|Y| \leqslant |X|$ (иными словами, любые две мощности сравнимы).*

Доказательство. Обозначим чрез $\mathcal{X}$ множество всевозможных троек вида (A, B, φ), где $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ и $\varphi\colon A \to B$ — биекция. Введем на этом множестве частичное упорядочение $\prec$. Именно, будем говорить, что $(A_1, B_1, \varphi_1) \prec (A_2, B_2, \varphi_2)$, если выполняются следующие условия:

(1) $A_1 \subseteq A_2$;

(2) $B_1 \subseteq B_2$;

(3) для всякого $x \in A_1$ имеем $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ (иными словами, φ_1 и φ_2 согласованы на множестве A_1).

Покажем, что частично упорядоченное множество $(\mathcal{X}, \prec)$ удовлетворяет условиям леммы Цорна. В самом деле, пусть $\mathcal{Y} = \{(A_\alpha, B_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — семейство элементов множества $\mathcal{X}$, линейно упорядоченное отношением $\prec$. Положим $A = \bigcup A_\alpha$, $B = \bigcup B_\alpha$; отображение $\varphi\colon A \to B$ определим следующим образом: если $x \in A$ лежит в множестве A_α, то положим $\varphi(x) = \varphi_\alpha(x) \in B_\alpha \subseteq B$ (ввиду условия (3) этот элемент не зависит от выбора α). Покажем, что φ — биекция A на B. В самом деле, пусть $x_1, x_2 \in A$ и $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. В силу линейной упорядоченности семейства имеем $x_1, x_2 \in A_\alpha$ для некоторого α; стало быть, $\varphi_\alpha(x_1) = \varphi_\alpha(x_2)$, так что $x_1 = x_2$, поскольку φ_α — биекция. Тем самым φ — инъекция. Покажем, что φ — сюръекция. В самом деле, пусть $y \in B$; тогда $y \in B_\alpha$ для некоторого α; поскольку $\varphi_\alpha\colon A_\alpha \to B_\alpha$ — биекция, имеем $y = \varphi_\alpha(x)$ для некоторого $x \in A_\alpha$, так что $y = \varphi(x)$. Тем самым доказана и сюръективность отображения φ. Значит, φ — биекция и тройка (A, B, φ) — элемент множества $\mathcal{X}$, являющийся, очевидно, верхней гранью множества $\mathcal{Y}$.

Поскольку $\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна, в множестве $\mathcal{X}$ существует максимальный элемент (A_0, B_0, φ_0). Теперь a priori возможны три случая.

(1) $A_0 = X$. В этом случае φ_0 осуществляет биекцию X на подмножество $B_0 \subseteq Y$, так что $|X| \leqslant |Y|$.

(2) $B_0 = Y$. В этом случае φ_0 осуществляет биекцию подмножества $A_0 \subseteq X$ на Y, так что $|Y| \leqslant |X|$.

(3) $A_0 \subsetneq X$, $B_0 \subsetneq Y$. Покажем, что этот случай невозможен. В самом деле, в условиях этого случая существуют элементы $u \in X \setminus A_0$, $v \in Y \setminus B_0$; положим $A_1 = A_0 \cup \{u\}$, $B_1 = B_0 \cup \{v\}$, и определим биекцию $\varphi_1\colon A_1 \to B_1$ так:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \neq u, \\ v, & x = u. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $(A_0, B_0, \varphi_0) \underset{\neq}{\prec} (A_1, B_1, \varphi_1)$, что противоречит максимальности элемента (A_0, B_0, φ_0). □

Второе приложение леммы Цорна — на следующей лекции.