17. Дополнения

На этой сокращенной лекции — последней лекции первого семестра — мы осветим два вопроса, на которые не хватило времени в прошлый раз.

Мы видели, что для раскрытия неопределенности вида $0/0$, то есть для нахождения предела частного в случае, когда и делимое, и делитель стремится к нулю, удобно пользоваться формулой Тейлора. Есть, однако, случай, когда формула Тейлора не помогает: речь идет о пределе частного в ситуации, когда делимое и делитель стремятся к бесконечности («раскрытие неопределенности вида ∞/∞). В этом случае удобно воспользоваться следующим приемом.

Предложение 17.1 (правило Лопиталя). *Пусть f и g — дифференцируемые вещественнозначные функции на интервале $(A;+\infty)$, где $A \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$, и при этом $g'(x) > 0$ для всех x. Если в этих условиях существует конечный предел $\lim_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x)) = c$, то $\lim_{x\to\infty}(f(x)/g(x)) = c$.*

Аналогичное утверждение верно в случае, когда $f'(x)/g'(x)$ стремится к бесконечности, а также когда x стремится не к бесконечности, а к конечному пределу.

Доказательство. Зададимся числом $\varepsilon > 0$. Покажем для начала, что существует такое x_0, что

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{при } x > x_0. \tag{17.1}$$

В самом деле, из равенства $\lim_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x)) = c$ вытекает существование такого x_0, что

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{при } \xi > x_0.$$

Если теперь $x > x_0$, то по теореме о среднем (Коши) найдется такое $\xi \in (x_0; x)$, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

так что выполнено неравенство (17.1).

Покажем теперь, говоря неформально, что при замене $\frac{f(x)}{g(x)}$ на $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ относительная погрешность стремится к нулю при $x \to \infty$ — иными словами, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}} = 1.$$

В самом деле, легко видеть, что

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}}{\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}} = \frac{f(x)-f(x_0)+f(x_0)}{g(x)-g(x_0)+g(x_0)} \Bigg/ \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - 1 =$$

$$= \frac{1+\frac{f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}}{1+\frac{g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}} - 1,$$

и ясно, что правая часть стремится к нулю.

Итак,

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \cdot \lambda(x), \qquad \lim_{x\to\infty} \lambda(x) = 0.$$

Из (17.1) вытекает, что существует такое $M > 0$, что

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| \leqslant M \qquad \text{при } x > x_0$$

(можно взять $M = \max(|c+\varepsilon/2|, |c-\varepsilon/2|)$). Поскольку существует такое $K > 0$, что $|\lambda(x) < \varepsilon/2M|$ при $x > K$, имеем, при $x > \max(x_0, K)$:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (17.1) вытекает, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{при } x > \max(x_0, K).$$

Все доказано. □

Следствие 17.2. *Пусть $a > 0$. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$$

Иными словами, $\ln x = o(x^a)$ — «логарифмическая функция растет медленнее степенной».

Доказательство. Это немедленно следует из правила Лопиталя:

$$\frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \frac{1}{x^a} \to 0.$$

$\square$

Следствие 17.3. *Пусть $a > 1$, $n > 0$. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

Доказательство. Будем многократно применять правило Лопиталя. Отношение производных числителя и знаменателя равно

$$\frac{nx^{n-1}}{a^x \cdot \ln a};$$

если $n < 1$, то все готово (числитель стремится к нулю, а знаменатель — к бесконечности), в противном случае возьмем производные еще раз, получим дробь $(n(n-1)x^{n-2})/(a^x(\ln a)^2)$, и т. д., пока не дойдем до отрицательной степени в числителе. $\square$

Перейдем ко второй теме этой лекции. Ранее мы неоднократно отмечали, что ряд Тейлора гладкой функции не обязан иметь положительный радиус сходимости, а если он сходится, то он не обязан сходится к данной функции. На самом деле можно показать (мы этого делать не будем), что *всякий* степенной ряд является рядом Тейлора некоторой гладкой функции. Сейчас мы построим пример функции, для которой реализуется вторая из указанных патологий: ряд Тейлора в окрестности некоторой точки сходится, но не к этой функции.

Предложение 17.4. *Существует функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:*

(1) *φ бесконечно дифференцируема;*
(2) *$\varphi(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$;*
(3) *$\varphi^{(n)}(0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

Из свойств (2) и (3) вытекает, что все коэффициенты Тейлора функции φ в нуле равны нулю, так что ряд Тейлора в нуле состоит из одних нулей и тем самым сходится при всех x; с другой стороны, ни в какой окрестности нуля он к функции φ не сходится, так как ни в какой окрестности нуля она не является тождественным нулем.

Доказательство. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ясно, что φ непрерывна в нуле и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Лемма 17.5. *Пусть функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, и пусть $\lim_{c\to a+0} f'(c) = k$. Тогда*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = k.$$

Доказательство леммы. Пусть последовательность положительных чисел $\{h_n\}$ стремится к нулю. Тогда по теореме Лагранжа имеем

$$\frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n} = f'(\xi_n),$$

где $a < \xi_n < a + h_n$. По теореме о двух милиционерах имеем $\lim \xi_n = a$, откуда $\lim f'(\xi_n) = k$. Ввиду произвольности выбора последовательности $\{h_n\}$ лемма доказана. $\square$

В свете леммы нам достаточно установить следующий факт:

Для всякого натурального n имеем $\lim_{x\to 0} \varphi^{(n)}(x) = 0$.

Более того, коль скоро функция φ является тождественным нулем при $x < 0$, можно заменить $\lim_{x\to 0}$ на $\lim_{x\to +0}$, а функцию φ — на функцию $\psi\colon x \mapsto e^{-1/x}$.

Заметим, что для всякого целого неотрицательного n имеем

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{P(x)\cdot e^{-1/x}}{x^k},$$

где P — многочлен и k — целое неотрицательное число. В самом деле, при $n = 1$ это проверяется непосредственно, а далее проверяется по индукции:

$$\left(\frac{P(x)\cdot e^{-1/x}}{x^k}\right)' = \frac{x^k(P(x)e^{-1/x})' - kx^{k-1}P(x)e^{-1/x}}{x^{2k}} =$$
$$= \frac{x^kP'(x)e^{-1/x} + (x^kP(x)/x^2)e^{-1/x} - kx^{k-1}P(x)e^{-1/x}}{x^{2k}} =$$
$$= \frac{(x^{k+2} + x^k - kx^{k+1})P(x)}{x^{2k+2}}e^{-1/x}.$$

Равенство $\lim_{x\to 0}\frac{P(x)\cdot e^{-1/x}}{x^k}=0$ тривиально вытекает из следствия 17.3 (сделайте замену $x=1/t$). $\square$

Построенная нам функция φ нужна не только для изощренных контрпримеров: она (а точнее говоря, сам факт существования функции со свойствами, перечисленными в условии предложения 17.4) играет важную техническую роль в анализе, в чем мы будем иметь случай убедиться.