16. Формула Тейлора (продолжение)

Докажем единственность представления из теоремы 15.7.

Предложение 16.1. *Пусть* $f\colon (p;q) \to \mathbb{R}$ *— функция класса* C^n*, и пусть* $a \in (p;q)$*. Предположим, что*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Тогда $c_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$ *при* $0 \leqslant j \leqslant n$*.*

Доказательство. Если положить $b_i = f^{(i)}(a)/a!$, то в свете теоремы 15.7 предложение будет вытекать из следующего утверждения.

> *Пусть* f *— произвольная функция на* (p,q)*, удовлетворяющая соотношениям*
>
> $$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$
> $$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n);$$
>
> *тогда* $b_i = c_i$ *при* $0 \leqslant i \leqslant n$*.*

Обратите внимание, что $o(x-a)^n$ в правых частях двух равенств — это, вообще говоря, две разные функции.

Для доказательства этого последнего утверждения положим $b_j - c_j = m_j$. Тогда, вычитая одно представление функции f из другого, получаем, что

$$m_0 + m_1(x-a) + \ldots + m_n(x-a)^n + o((x-a)^n) = 0,$$

или

$$m_0 + m_1(x-a) + \ldots + m_n(x-a)^n = o((x-a)^n).$$

Если не все m_j равны нулю, то пусть $m_0 = \ldots = m_{k-1} = 0$ и $m_k \neq 0$. Тогда имеем

$$m_k(x-a)^k = (x-a)^{k+1}(m_{k+1} + m_{k+2}(x-a) + \ldots + m_n(x-a)^{n-k-1}) + o((x-a)^n). \tag{16.1}$$

В правой части оба слагаемых есть, очевидно, $o((x-a)^k)$, так что и их сумма есть $o(x-a)^k$; с другой стороны, левая часть не есть $o(x-a)^k$, так как ее отношение к $(x-a)^k$ есть ненулевая константа m_k, к нулю не стремящаяся. Получили противоречие.

Более формально можно провести это рассуждение так. Поделив в (16.1) обе части на $(x-a)^k$, получим, что

$$m_k = (x-a)P(x) + \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^k} = (x-a)P(x) + (x-a)^{n-k}\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n},$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен. Поскольку $P(x)$ и $(x-a)^{n-k}$ ограничены в некоторой окрестности точки k, в то время как $x-a \to 0$ и $o((x-a)^n)/(x-a)^n \to 0$ (при $x \to a$), получаем, что правая часть стремится к нулю, в то время как левая часть — ненулевая константа. $\square$

Вот еще одно применение формулы Тейлора и символа $o(\cdot)$.

Предложение 16.2. *Пусть $f\colon (p;q) \to \mathbb{R}$ — функция класса C^2, и пусть $a \in (p;q)$. Предположим, что $f'(a) = 0$. Тогда если $f''(a) > 0$, то в точке a достигается локальный минимум функции f, а если $f''(a) < 0$, то в точке a достигается локальный максимум.*

Доказательство. Разберем, например, случай, когда $f''(a) > 0$. По формуле Тейлора имеем

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \underbrace{o((x-a)^2)}_{r(x)}.$$

В правой части второе слагаемое положительно при всех $x \neq a$, так что все будет доказано, если мы установим, что при всех x, достаточно близких к a, третье слагаемое будет по модулю меньше второго: тогда сумма второго и третьего слагаемых по-прежнему будет положительна при всех x, достаточно близких к a, откуда будет следовать, что $f(x) > f(a)$ при всех x, достаточно близких к a.

Чтобы установить указанное соотношение между вторым и третьим слагаемыми, заметим, что $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^2} = 0$; значит, существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{r(x)}{(x-a)^2}\right| < \frac{f''(a)}{2}.$$

При $0 < |x-a| < \varepsilon$ имеем теперь

$$|r(x)| < \frac{f''(a)}{2} \Rightarrow \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + r(x) > 0,$$

что и требовалось. $\square$

Если функция f бесконечно дифференцируема на $(p;q)$, то ей можно сопоставить формальный ряд, называемый, как мы помним, рядом Тейлора этой функции в точке $a \in (p;q)$:

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \ldots$$

Мы не случайно использовали в этой формуле ни к чему не обязывающий знак $\sim$ вместо знака равенства: как мы уже отмечали, ряд Тейлора может расходиться при всех x (кроме, естественно, $x = a$), а может сходится, но вовсе не к функции f. Так или иначе, сейчас мы выпишем ряды Тейлора для элементарных функций.

Начнем с экспоненты, синуса и косинуса. Коэффициенты ряда Тейлора для них (в нуле) находятся без труда:

$$\begin{aligned} e^x &\sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\ \cos x &\sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \\ \sin x &\sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \end{aligned}$$

Как мы знаем, на самом деле эти ряды сходятся к соответствующим функциям для всех $x \in \mathbb{R}$.

Непосредственно находятся и коэффициенты ряда Тейлора в нуле для функции $x \mapsto (1+x)^a$:

$$(1+x)^a \sim 1 + a \cdot x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} + \ldots$$

Этот ряд называется биномиальным рядом. Его радиус сходимости равен единице; позднее мы покажем, что на интервале $(-1;1)$ он сходится к $(1+x)^a$. Если a — натуральное число, то биномиальный ряд содержит лишь конечное количество ненулевых членов; в этом случае знак $\sim$ можно заменить на знак равенства при всех x, поскольку при этом получается обычная формула бинома Ньютона.

Полезно явно выписать частный случай биномиального ряда, получающийся при $a = -1$:

$$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{16.2}$$

Построим теперь ряд Тейлора для логарифма. По традиции вместо ряда для логарифма в единице выписывают ряд для функции

$x \mapsto \ln(1+x)$ в нуле. Для нахождения коэффициентов воспользуемся следующим приемом. Заметим, что $(\ln(1+x))' = 1/(1+x)$, так что $(\ln(1+x))^{(n)} = (1/(1+x))^{(n-1)}$, значения же производных от $1/(1+x)$ в нуле могут быть считаны с формулы (16.2). Поэтому имеем:

n	0	1	2	3	$4\ldots$
$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}(0)$	1	$-1!$	$2!$	$-3!$	$4!\ldots$
$(\ln(1+x)^{(n)}(0))$	0	1	$-1!$	$2!$	$-3!\ldots$

Отсюда получаем ряд Тейлора для логарифма:

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Позднее мы покажем, что этот ряд сходится к $\ln(1+x)$ для всех $x \in (-1;1]$.

Чтобы получить ряд Тейлора для арктангенса, воспользуемся аналогичным приемом. Заметим, что $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$; ряд Тейлора для $1/(1+x^2)$ получается подстановкой $x \mapsto x^2$ в формулу (16.2):

$$\frac{1}{1+x^2} \sim 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \tag{16.3}$$

Формальное обоснование таково: из соотношения

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

вытекает, что

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+\ldots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n}) = 1-x^2+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+o(x^{2n-1}),$$

так что начальные отрезки ряда (16.3) совпадают с правыми частями формулы Тейлора для $1/(1+x^2)$. Теперь, замечая, что $(\operatorname{arctg} x)^{(n)}(0) = (1/(1+x^2))^{(n-1)}(0)$ и считывая значения производных от $1/(1+x^2)$ с формулы (16.3), получаем:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}(0)$	1	0	$-2!$	0	$4!$	0	$-6!$	$0\ldots$
$(\operatorname{arctg} x)^{(n)}(0)$	0	1	0	$-2!$	0	$4!$	0	$-6!\ldots$

$$\operatorname{arctg} x \sim x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

Позднее мы покажем, что этот ряд сходится к $\operatorname{arctg} x$ для всех $x \in [-1;1]$.

Приведем теперь несколько примеров работы с формулой Тейлора.

Пример 16.3. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}.$$

Решение. Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3); \end{aligned}$$

стало быть,

$$e^x - e^{-x} - 2x = \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Теперь имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/3 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-1/6 + \frac{o(x^3)}{x^3}} =$$

$$= \frac{1/3 + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3}}{-1/6 + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1/3 + 0}{-1/6 + 0} = -2.$$

□

Пример 16.4. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot x^2}{1 = \frac{o(x)}{x}} = \frac{0 + 0 \cdot 0}{1 + 0} = 0.$$

□

Пример 16.5. Написать формулу Тейлора в нуле с остаточным членом $o(x^4)$ для функции $f(x) = \ln(1 + x) \cdot \sin x$.

Решение. Выпишем формулы Тейлора с таким остаточным членом для каждого из сомножителей:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

$\square$

Теперь перемножим эти равенства и приведем подобные; будем при этом учитывать, что все слагаемые вида x^m при $m \geqslant 4$ имеют вид $o(x^4)$ (так что находить коэффициенты при таких слагаемых незачем), а также что $o(x^4)$, помноженное на любой многочлен и вообще на любую ограниченную при $x \to 0$ функцию, также будет иметь вид $o(x^4)$. Так как сумма слагаемых вида $o(x^4)$ также имеет вид $o(x^4)$, получаем:

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = \\ = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

(остальные слагаемые либо имеют степень > 4, либо являются произведениями многочлена на $o(x^4)$). Приводя подобные, получаем окончательно:

$$\ln(1+x) \cdot \sin x = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

Пример 16.6. Написать формулу Тейлора в нуле с остаточным членом $o(x^4)$ для функции $f(x) = \sin(\sin x)$.

Решение. Поскольку $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, имеем

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^4 x).$$

Заметим теперь, что $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$, так что $o(\sin^4 x) = o(x^4)$. Теперь подставляем выражение для $\sin x$ и действуем, как в предыдущем примере:

$$\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{6} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

(все остальные слагаемые либо содержат x в степени, большей 4, либо содержат множителем $o(x^4)$). Окончательно получаем:

$$\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

$\square$

Пример 16.7. Написать формулу Тейлора в нуле с остаточным членом $o(x^4)$ для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Решение. Воспользуемся «методом неопределенных коэффициентов». Именно, пусть формула Тейлора для тангенса имеет вид

$$\operatorname{tg} x = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + o(x^4)$$

($c_0 = \operatorname{tg} 0 = 0$). Из тождества $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$ и формул Тейлора для синуса и косинуса получаем, действуя, как выше, следующее:

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = (c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + o(x^4)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) =$$
$$= c_1x - \frac{c_1}{2}x^3 + c_2x^2 - \frac{c_2}{2}x^4 + c_3x^3 + c_4x^4 + o(x^4) =$$
$$= c_1x + c_2x^2 + \left(c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \left(c_4 - \frac{c_2}{2}\right)x^4.$$

Поскольку, с другой стороны, $\sin x = x - (x^3/6) + o(x^4)$, получаем из единственности коэффициентов Тейлора (предложение 16.1) такую систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6} \\ c_4 - \dfrac{c_2}{2} = 0. \end{cases}$$

Решая ее, последовательно находим $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1/3$, $c_4 = 0$. Стало быть,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Стоит отметить, что коэффициент при x^n в разложении тангенса через известные нам функции (факториалы и проч.) не выражается. □

В примерах 16.3 и 16.4 мы показали, как с помощью формулы Тейлора можно находить пределы дробей, у которых и числитель, и знаменатель стремятся к нулю (и тем самым неприменима теорема о пределе частного). Нахождение таких пределов называют еще «раскрытием неопределенности вида 0/0»; вы можете прочитать в любом учебнике формулировку и доказательство «правила Лопиталя», помогающего иногда при раскрытии таких неопределенностей; на практике обычно удобнее пользоваться формулой Тейлора.