14. Тригонометрия

Теперь все готово для того, чтобы дать строгие определения тригонометрических функций. На первый взгляд они, видимо, покажутся довольно странными; тем не менее мы покажем, что определенные нами синус, косинус и число π обладают всеми привычными свойствами, а в конце лекции объясним, почему наши определения согласуются с тем, что вам рассказывали в школе.

Определение 14.1. Если $t \in \mathbb{R}$, то положим

$$\cos t = \operatorname{Re}(e^{it}), \quad \sin t = \operatorname{Im}(e^{it}).$$

Следствие 14.2 (формула Эйлера). $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Эта формула, любимая авторами популярных книг, в нашем изложении выглядит как тавтология. Содержательный смысл она обретет только тогда, когда мы убедимся, что наши определения синуса и косинуса согласуются с неформальными определениями синуса и косинуса, известными из школы.

Из определения экспоненты вытекают следующие разложения в ряды для синуса и косинуса.

Предложение 14.3. *Для всякого* $x \in \mathbb{R}$ *функции* $\cos x$ *и* $\sin x$ *представляются в виде сумм следующих рядов:*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \tag{14.1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots. \tag{14.2}$$

Доказательство. Подставим $z = ix$ в ряд для $\exp(z) = e^z$ из определения 12.7. Если обозначить n-ю частичную сумму этого ряда через E_n (для ясности: $E_1 = 1$, $E_2 = 1 + ix \dots$), а nе частичные суммы рядов (14.1) и (14.2) через C_n и S_n ($C_1 = 1$, $C_2 = 1 - \frac{x^2}{2} \dots$, $S_1 = x$, $S_2 = x - \frac{x^3}{6} \dots$), то имеем $\operatorname{Re}(E_n) = C_{[(n+1)/2]}$, $\operatorname{Im}(E_n) = S_{[n/2]}$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} E_n = e^{ix}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(E_n) = \operatorname{Re}(\lim_{n\to\infty} E_n) = \cos x,$$
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(E_n) = \operatorname{Im}(\lim_{n\to\infty} E_n) = \sin x.$$

Стало быть,

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} C_{[(n+1)/2]}, \quad \sin x = \lim_{n\to\infty} S_{[n/2]}.$$

Поскольку из существования пределов в правых частях следует, как легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} C_{[(n+1)/2]} = \lim_{n\to\infty} C_n, \quad \lim_{n\to\infty} S_{[n/2]} = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

предложение доказано. □

Следствие 14.4. *Для всякого* $x \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = \sin x.$$

Доказательство. Ряд для косинуса содержит только четные степени x, ряд для синуса — только нечетные. □

Иными словами, косинус, как и положено, четная функция, а синус — нечетная. Давайте убеждаться, что наши косинус и синус обладают и другими свойствами, известными из школы.

Предложение 14.5. *Имеем* $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$*; для всякого* $x \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{14.3}$$

Доказательство. Два первые утверждения очевидны из того, что $e^{i\cdot 0} = e^0 = 1$. Третье доказывается так:

$$1 = e^{ix}e^{-ix} = (\cos x + i\sin x)(\cos(-x) + i\sin(-x)) = \\ = (\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

□

Как показывает доказательство следующего предложения, «тригонометрические формулы сложения» немедленно вытекают из правила умножения комплексных чисел.

Предложение 14.6. *Для любых* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2,$$
$$\sin(x_1 + x_2) = \sin_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2.$$

Доказательство. Запишем равенство

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1}e^{ix_2} = (\cos x_1 + i\sin x_1)(\cos x_2 + i\sin x_2);$$

теперь осталось в правой части раскрыть скобки и привести подобные члены. □

Чтобы получить дальнейшие свойства тригонометрических функций (знаки, промежутки монотонности, формулы приведения) нам необходимо определить число π. Займемся этим.

Предложение 14.7. *У уравнения $\cos x = 0$ существует наименьший положительный корень.*

Доказательство. Покажем сначала, что у этого уравнения есть хотя бы один положительный корень. Поскольку косинус — функция дифференцируемая и тем самым непрерывная, ввиду теоремы о промежуточном значении это будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 14.8. *Пусть ряд*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{14.4}$$

сходится, и пусть

$$1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

— строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда ряд

$$(a_1+\ldots+a_{n_1-1})+(a_{n_1}+\ldots+a_{n_2-1})+\ldots+(a_{n_k}+\ldots+a_{n_{k+1}-1})+\ldots \tag{14.5}$$

также сходится, причем к той же сумме, что и ряд (14.4).

Доказательство леммы. Последовательность частичных сумм ряда (14.5) — подпоследовательность в последовательности частичных сумм ряда (14.5), а предел подпоследовательности совпадает с пределом исходной последовательности. □

Иными словами, в сходящемся ряде можно произвольно группировать слагаемые, не меняя их порядка, и эта операция не повлияет ни на его сходимость, ни на его сумму.

Возвращаясь к доказательству предложения, покажем для начала, что $\cos(2) < 0$. В самом деле, ввиду предложения 14.3 имеем

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \ldots;$$

ввиду леммы 14.8 имеем

$$\cos(2) = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - (\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}) - \ldots$$

Сумма первых трех слагаемых равна $(-1/3)$, а каждая из скобок положительна, поскольку при $n \geqslant 2$ имеем $(n+1)(n+2) > 4$, откуда

$$\frac{2^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{2^n}{n!}\frac{4}{(n+1)(n+2)} < \frac{2^n}{n!}.$$

Тем самым $\cos(2) < -1/3 < 0$, что и утверждалось, так что уравнение $\cos x = 0$ имеет положительные корни; обозначим это (непустое) множество положительных корней через X, и пусть $c = \inf X$. Мы утверждаем, что $f(c) = 0$. В самом деле, так как $c = \inf X$, существует последовательность $x_n \in X$, сходящаяся к c (достаточно заметить, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ число $c+1/n$ не является нижней границей для X, так что можно выбрать $x_n \in [c; c+1/n) \cap X$; имеем $|x_n - c| < 1/n$, так что $\lim x_n = c$). Ввиду непрерывности косинуса имеем теперь $\cos c = \lim_{n\to\infty} \cos x_n = 0$. Итак, множество X содержит свою нижнюю грань c, так что c является его наименьшим элементом. Осталось заметить, что $c \neq 0$, так как $\cos 0 = 1 > 0$. $\square$

Определение 14.9. Наименьший положительный корень уравнения $\cos x = 0$ обозначается $\pi/2$.

Предложение 14.10. $\cos(\pi/2) = 1$, $\sin(\pi/2) = 1$*; на отрезке* $[0; \pi/2]$ *синус строго возрастает, а косинус строго убывает. Функции синус и косинус положительны на интервале* $(0; \pi/2)$.

Доказательство. Первое равенство очевидно из определения числа π. Из него и тождества $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ вытекает, что $\sin x = 1$ или -1. Далее, $\cos x > 0$ на интервале $(0; \pi/2)$, поскольку $\pi/2$ — наименьший положительный корень уравнения $\cos x = 0$. Так как $(\sin x)' = \cos x$, отсюда вытекает, что синус строго возрастает на отрезке $[0; \pi/2]$; поскольку $\sin(0) = 0$, имеем $\sin x > 0$ при $0 < x \leqslant \pi/2$, так что $\sin(\pi/2)$ равен именно 1, а не -1. Поскольку, наконец, $(\cos x)' = -\sin x$ и $\sin x > 0$ при $0 < x < \pi/2$, функция косинус строго убывает на отрезке $[0; \pi/2]$. $\square$

Предложение 14.11. *Для функций синус и косинус верны формулы приведения.*

Набросок доказательства. Формулы приведения выражают $\cos(\frac{\pi k}{2} \pm x)$ и $\sin(\frac{\pi k}{2} \pm x)$ через $\cos x$ и $\sin x$; поскольку у нас есть значения косинуса и синуса от $\pi/2$ (предложение 14.10), формулы сложения (предложение 14.6) и информация о четности и нечетности синуса и косинуса (следствие 14.4), эти формулы получаются непосредственной проверкой, которую мы оставляем читателю (упражняйтесь, пока общий принцип не станет ясен). $\square$

Следствие 14.12. *Функции синус и косинус периодичны с периодом* 2π*.*

Заметим, что из предложения 14.10 и периодичности непосредственно вытекают известные из школы сведения о промежутках монотонности синуса и косинуса и о решениях уравнений $\sin x = 0$, $\cos x = 0$.

Определение 14.13. $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$.

Предложение 14.14.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Доказательство. Немедленно следует из правила дифференцирования частного и тождества $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. □

Из определения тангенса и котангенса и предложения 14.14 немедленно вытекают школьные факты об их периодичности и промежутках монотонности.

Заметим, что все тригонометрические формулы выводятся из формул сложения, формул приведения и тождества $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; поскольку все эти формулы мы уже доказали, можно констатировать, что для определенных нами тригонометрических функций выполнены все привычные формулы тригонометрии.

Коль скоро с промежутками монотонности тригонометрических функций мы разобрались, корректно определенными оказываются функции арксинус, арккосинус и арктангенс. В силу теоремы 12.4 эти функции непрерывны.

Предложение 14.15. *Функция* $\arcsin$ *дифференцируема на* $(-1;1)$*, а функция* arctg *— на всем* $\mathbb{R}$*. Производные этих функций таковы:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Доказательство. Поскольку производные синуса и тангенса не обращаются в нуль на $(-\pi/2; \pi/2)$, утверждения о дифференцируемости вытекают из предложения 12.6. Производные вычисляются стандартным образом с использованием того же предложения:

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{(\sin'(\arcsin x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg})'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1/\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Нам осталось объяснить, как связано наше определение тригонометрических функций с тем (с неизбежностью неформальным) определением, что давалось в школе. Неформальность школьного определения состояла в том, что в нем так или иначе использовалось понятие длины кривой. Давайте обсудим это понятие более аккуратно.

Интуитивное понятие кривой в математике может уточняться многими разными способами. Нам сейчас подходит следующий. гладкой кривой на плоскости называется отображение $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}^2$, действующее по формуле $t \mapsto (x(t), y(t))$, где x и y — дифференцируемые функции. Вектор скорости точки, движущейся по закону $t \mapsto \varphi(t)$, равен $(x'(t); y'(t))$ в момент t; его длина — не что иное, как линейная скорость точки; в случае, когда линейная скорость постоянна, путь, пройденный точкой «за время от t_1 до t_2» (т. е. длина соответствующего участка кривой), равен произведению линейной скорости на $(t_2 - t_1)$ (в общем случае — интегралу линейной скорости по времени).

Рассмотрим теперь отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$, заданное формулой $t \mapsto (\cos t; \sin t)$; так как $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, это отображение на окружность радиуса 1 с центром вначале координат, причем из того, что мы знаем об интервалах монотонности синуса и косинуса, ясно, что при $t \in [0; 2\pi]$ окружность проходится ровно один раз. Вектор скорости точки в момент t равен $((\cos t)'; (\sin t)') = (-\sin t; \cos t)$; его длина равна $\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, так что за время t точка проходит путь t. В частности, за время 2π точка пройдет путь 2π; ввиду сказанного выше это означает, что длина окружности радиуса 1 равна 2π, так что число π из определения 14.9 является «настоящим». Вспомним теперь школьное определение синуса и косинуса числа t: если выйти из точки $(1; 0)$, пойти по единичной окружности против часовой стрелки и пройти путь t, то абсцисса точки, в которой мы остановимся, равна $\cos t$, а ордината равна $\sin t$. С другой стороны, путь, пройденный точкой за время t при отображении $t \mapsto (\cos t; \sin t)$, как раз и равен t. Это показывает, что наше определение согласовано со школьным.