13. Экспонента и логарифм

Для завершения доказательства предложения 12.8 нам остается дать одно определение и доказать одно предложение.

Определение 13.1. Ряд $\sum a_i$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_i|$.

Доказанный нами ранее «признак абсолютной сходимости» показывает, что абсолютно сходящийся ряд сходится и в обычном смысле.

Предложение 13.2. *Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{i=0}^{\infty} b_n$ — абсолютно сходящиеся ряды. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ положим*

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots a_k b_0.$$

Если ряды $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{i=0}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то и ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_n$ сходится, причем его сумма равна произведению сумм рядов $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{i=0}^{\infty} b_n$.

Поскольку ряд для экспоненты абсолютно сходится (мы это установили в процессе доказательства предложения 12.7), из этого предложения, как мы объясняли на предыдущей лекции, вытекает и предложение 12.8.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned}
A_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i, & B_k &= \sum_{i=0}^{k} b_i, & C_k &= \sum_{i=0}^{k} c_i,\\
\tilde{A}_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i, & \tilde{B}_k &= \sum_{i=0}^{k} b_i, & &\\
A &= \lim_{k\to\infty} A_k, & B &= \lim_{k\to\infty} B_k, & &\\
\tilde{A} &= \lim_{k\to\infty} A_k, & \tilde{B} &= \lim_{k\to\infty} B_k. & &
\end{aligned}$$

Нам нужно доказать, что $\lim_{k\to\infty} C_k = AB$; поскольку $\lim_{k\to\infty} A_k B_k = AB$ по теореме о пределе произведения, для этого достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} |A_n B_n - C_n| = 0. \tag{13.1}$$

Имеем, очевидно,

$$|A_nB_n - C_n| = \left|\sum_{\substack{i\leqslant n, j\leqslant n\\ i+j>n}} a_ib_j\right| \leqslant \sum_{\substack{i\leqslant n, j\leqslant n\\ i+j>n}} |a_i|\cdot|b_j|, \qquad (13.2)$$

так что достаточно показать, что правая часть в (13.2) стремится к нулю при $n\to\infty$. Заметим, что если $i+j>n$, то либо $i>[n/2]$, либо $j>[n/2]$ (квадратными скобками обозначена целая часть). Поэтому правую часть (13.1) можно оценить так:

$$\sum_{\substack{i\leqslant n, j\leqslant n\\ i+j>n}} |a_i|\cdot|b_j| \leqslant \sum_{\substack{i>[n/2]\\ \text{или}\\ j>[n/2]}} = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} |a_i|\cdot|b_j| - \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant [n/2]\\ 0\leqslant j\leqslant [n/2]}} |a_i|\cdot|b_j| =$$

$$= \tilde{A}_n\tilde{B}_n - \tilde{A}_{[n/2]}\tilde{B}_{[n/2]}.$$

Теперь заметим, что, в силу абсолютной сходимости рядов $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{i=0}^{\infty} b_n$, существуют конечные пределы $\lim_{n\to\infty}\tilde{A}_n$ и $\lim_{n\to\infty}\tilde{B}_n$, а значит — и предел $\lim_{n\to\infty}\tilde{A}_n\tilde{B}_n$. Теперь равенство $\lim_{n\to\infty}(\tilde{A}_n\tilde{B}_n - \tilde{A}_{[n/2]}\tilde{B}_{[n/2]}) = 0$ очевидно ввиду критерия Коши. Аккуратно доказательство можно провести так: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое N, что при $k>l>N$ имеем $\tilde{A}_k\tilde{B}_k - \tilde{A}_l\tilde{B}_l < \varepsilon$. Если теперь $N_1 > 2N+2$, то при $n>N_1$ имеем $n>[n/2]>N$, так что

$$|\tilde{A}_n\tilde{B}_n - \tilde{A}_{[n/2]}\tilde{B}_{[n/2]}| = \tilde{A}_n\tilde{B}_n - \tilde{A}_{[n/2]}\tilde{B}_{[n/2]} < \varepsilon.$$

Этим завершается доказательство предложения 13.2, а тем самым и предложения 12.8. □

Теперь мы можем доказать основное свойство экспоненты.

Предложение 13.3. *Для всякого $a\in\mathbb{C}$ имеем*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} = \exp(a).$$

В этом предложении используется предел в смысле, нам ранее не встречавшемся: это предел функции из $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{C}\setminus\{0\}$) в $\mathbb{C}$. Определяется он дословно так же, как обычный предел функции: в развернутом виде предложение 13.3 означает, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если $0<|h|<\delta$, то

$$\left|\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} - \exp(a)\right| < \varepsilon.$$

Основные свойства пределов функций комплексного переменного (предел суммы, предел частного и пр.) совпадают со свойствами пределов функций действительного переменного и доказываются дословно так же.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} = \frac{\exp(a)\exp(h)-\exp(a)}{h} = \exp(a)\frac{\exp(h)-1}{h}.$$

□

Стало быть, достаточно показать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = 1.$$

Из определения экспоненты следует, что

$$\frac{\exp(h)-1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots + \frac{h^n}{(n+1)!} + \ldots$$

Поскольку $(n+1)! \geqslant 2^n$ при $n \geqslant 1$, имеем, при $|h| < 2$,

$$\left|\frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots + \frac{h^n}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{|}{h}|2! + \frac{|h|^2}{3!} + \ldots + \frac{|h|^n}{(n+1)!} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|h|}{2} + \frac{|h|^2}{2^2} + \ldots + \frac{|h|^n}{2^n} \leqslant \frac{|h|/2}{1-|h|/2}$$

(в правой части мы оценили через сумму бесконечной геометрической прогрессии). Итак,

$$\left|\frac{\exp(h)-1}{h} - 1\right| \leqslant \frac{|h|/2}{1-|h|/2} \qquad \text{при } |h| < 2.$$

Поскольку правая часть в этом неравенстве стремится к нулю при $h \to 0$, левая часть стремится к нулю по теореме о двух милиционерах. Все доказано.

Очевидно, что при $x \in \mathbb{R}$ имеем $\exp(x) \in \mathbb{R}$. Поэтому из доказанного предложения вытекает такое важное следствие.

Следствие 13.4. *Если рассматривать экспоненту как функцию из* $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$, *то* $\exp'(x) = \exp(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$.

Производная экспоненты как функции комплексного переменного пригодится нам на следующей лекции, когда мы будем работать с тригонометрическими функциями. А пока что перечислим несколько элементарных свойств экспоненты как функции действительного переменного.

Предложение 13.5. (1) $\exp(x) > 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$.

(2) *Функция* $\exp$ *монотонно возрастает на всем* $\mathbb{R}$.

(3) $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

(4) *Функция* $\exp$ *осуществляет биекцию* $\mathbb{R}$ *на* $(0; +\infty)$.

Доказательство. (1) То, что $\exp(x) > 0$ при $x \geqslant 0$, очевидно из определения. Далее, ясно, что $\exp(0) = 1$, откуда и из предложения 12.8 вытекает, что $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ Если теперь $x < 0$, то $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$, так как $-x > 0$.

(2) Из определения очевидно, что $\exp(x) > 1$ при $x > 0$. Если теперь $x_2 > x_1$, то $\exp(x_2) - \exp(x_1) = \exp(x_1)(\exp(x_2 - x_1) - 1)$, и в правой части неравенства стоит произведение двух положительных чисел.

(3) Поскольку из определения очевидно, что $\exp(x) > 1+x$ при $x > 0$, первое утверждение очевидно. Второе утверждение следует из первого и тождества $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

(4) Это очевидно из (2), (3) и теоремы о промежуточном значении. □

Предложение 13.6. *Если* $x \in \mathbb{Q}$, *то* $\exp(x) = e^x$. *В частности,* $\exp(1) = e$.

Доказательство. Равенство $\exp(1) = e$ мы установили в лекции 4. Если $n \in \mathbb{N}$, то из предложения 12.8 имеем

$$(\exp(1/n))^n = \exp\Bigl(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots \frac{1}{n}}_{n \text{ слагаемых}}\Bigr) = \exp(1) = e,$$

откуда $\exp(1/n) = \sqrt[n]{e} = e^{1/n}$. Теперь из предложения 12.8 ясно, что $\exp(m/n) = e^{m/n}$ при любых $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. □

С этого момента мы изменим обозначения и будем вместо $\exp(z)$ писать e^z (и для действительных, и для произвольных комплексных z). При $z \in \mathbb{Q}$ эта запись, как показывает предложение 13.6, согласуется с существующими определениями, а при всех прочих z она сама служит определением степени с основанием e.

Вернемся теперь к предложению 13.5. Из его пунктов (2) и (4) вытекает следующее.

Предложение-определение 13.7. *Натуральным логарифмом* действительного числа числа $a > 0$ называется такое число $x \in \mathbb{R}$, что $e^x = a$ (обозначение: $x = \ln a$). Натуральный логарифм числа $a > 0$ существует и единственен. Функция $x \mapsto \ln x$ является строго возрастающей и непрерывной на интервале $(0; +\infty)$.

Доказательство. Существование логарифма следует из теоремы о промежуточном значении, единственность — из монотонности экспоненты, непрерывность — из теоремы 12.4. □

Теперь нетрудно вывести известную формулу для производной натурального логарифма.

Предложение 13.8. $(\ln x)' = 1/x$.

Доказательство. Воспользуемся предложением 12.6 (формулой для производной обратной функции):

$$(\ln)'(a) = \frac{1}{(\exp)'(\ln a)} = \frac{1}{\exp(\ln a)} = frac1a.$$

□

Итак, мы построили показательную и логарифмическую функцию с основанием e. Переход к произвольному основанию производится уже число формально.

Определение 13.9. Для всяких $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ положим $a^x = e^{x \ln a}$.

Для всяких $a > 0$, $a \neq 1$ $x > 0$ положим $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Вывод формул для производной степенной функции с произвольным показателем, а также логарифмической и показательной функций с произвольным основанием (см. таблицу 1), производится теперь стандартным способом с использованием формулы для производной сложной функции. Например, производная для функции $x \mapsto a^x$ получается так:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Прежде чем двигаться дальше, докажем одну важную теорему.

Теорема 13.10. *Пусть $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда на отрезке $[a; b]$ существуют такие точки ξ и η, что $f(\eta) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi)$ для всех $x \in [a; b]$ (иными словами, функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем наибольшего и наименьшего значений).*

Если функция непрерывна не на отрезке, а на открытом интервале, то теорема перестает быть верной. Простейший пример — функция $f(x) = x$ на интервале $(0; 1)$.

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать утверждение про наибольшее значение (утверждение про наименьшее значение получится тогда, если заменить f на $-f$).

Докажем сначала, что f ограничена сверху. В самом деле, если это не так, то для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $x_n \in [a; b]$, что $f(x_n) > n$. По лемме Гейне—Бореля (следствие 9.9) в этой последовательности существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $x \in X$. Так как функция f непрерывна, имеем $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$; в частности, последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ сходится и тем самым ограничена. С другой стороны, однако, $f(x_{n_k}) > n_k$, а $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, и это противоречит ограниченности последовательности $\{f(x_{n_k})\}$. Полученное противоречие доказывает ограниченность функции f.

Положим теперь $X = f([a; b]) \subset \mathbb{R}$. По доказанному множество X ограничено сверху, так что у него существует верхняя грань; пусть $c = \sup X$. Тогда существует такая последовательность элементов $y_n \in X$, что $\lim_{n\to\infty} y_n = c$. Пусть $y_n = f(x_n)$, где $x_n \in [a; b]$. По лемме Гейне—Бореля в последовательности $\{x_n\}$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $\xi \in X$. Так как функция f непрерывна, имеем $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$; с другой стороны, так как предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности, имеем $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = c$. Стало быть, $f(\xi) = c$, так что значение функции f в точке ξ больше либо равно значений f во всех остальных точках. Тем самым в точке ξ достигается наибольшее значение. $\square$

Теперь все готово для того, чтобы обосновать известные из школы правила исследования функции с помощью производной. Начнем с достаточного условия экстремума.

Предложение 13.11 (теорема Ферма). *Пусть $f\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Если $c \in (a; b)$ — локальный экстремум функции f то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть, для определенности, c — локальный максимум. Из определения производной вытекает, что

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c + h_n) - f(c)}{h_n}, \qquad \text{если } \lim h_n = 0.$$

Если положить $h_n = 1/n$, то дробь в этой формуле будет неположительна при всех n (числитель неположителен, знаменатель положителен); следовательно, предел также неположителен и $f'(c) \leqslant 0$. Если же $h_n = -1/n$, то дробь в этой формуле будет неотрицательна при всех n (числитель неположителен, знаменатель отрицателен); следовательно, предел также неотрицателен, и $f'(c) \geqslant 0$. Сопоставляя эти неравенства, получаем, что $f'(c) = 0$. □

Итак, необходимое условие экстремума установлено. Теперь перейдем к достаточным условиям возрастания и убывания. Первый шаг к этому — следующее предложение, представляющее и самостоятельный интерес.

Предложение 13.12 (теорема Ролля). *Пусть функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Если $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $c \in (a;b)$, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. По теореме 13.10 функция f достигает на $[a;b]$ наибольшего и наименьшего значений. Если оба эти значения совпадают с $f(a) = f(b)$, то f постоянна и тем самым $f'(c) = 0$ для всех $c \in (a;b)$; в противном случае либо наибольшее, либо наименьшее значение достигается в какой-нибудь точке c, лежащей внутри отрезка $[a;b]$, так что $f'(c) = 0$ по теореме Ферма. □

С помощью несложной манипуляции теорему Ролля можно усилить следующим образом.

Предложение 13.13 (теорема Лагранжа). *Пусть функция $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a;b)$, что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство. Пусть $y = px + q$ — уравнение прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Если положить $g(x) = f(x) - px - q$, то $g(a) = g(b) = 0$, так что функция g удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует такое $c \in (a;b)$, что $g'(c) = 0$. Поскольку $g'(x) = f'(x) - p$, имеем $f'(c) = p$. Остается заметить, что $p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ по построению. □

Следствие 13.14 (достаточный признак монотонности). *Пусть* $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ — *дифференцируемая функция. Если* $f'(x) > 0$ *для всех* $x \in (a;b)$*, то* f *строго возрастает на* $(a;b)$*; если* $f'(x) < 0$ *для всех* $x \in (a;b)$*, то* f *строго убывает на* $(a;b)$.

Доказательство. Рассмотрим случай положительной производной. Пусть $a < u < v < b$; покажем, что $f(v) > f(u)$. В самом деле, ограничение функции f на отрезок $[u;v]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, так что для некоторого $c \in (p;q)$ имеем

$$f'(c) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p} > 0;$$

поскольку знаменатель дроби положителен и дробь положительна, положителен и числитель, так что $f(q) > f(p)$, как и утверждалось. $\square$