12. Степень с рациональным показателем; экспонента

В дополнение к сказанному в предыдущей лекции укажем еще, как можно свести понятие предела к понятию непрерывности. Именно, выполнено следующее очевидное предложение.

Предложение 12.1. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ и $f \colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ — функция. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$*;*

2) Функция

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} b, & x = a \\ f(x), & x \neq a \end{cases}$$

непрерывна в точке a.

Вернемся теперь к тому, чем мы закончили предыдущую лекцию. Сформулируем простое следствие теоремы 11.10 о промежуточном значении.

Следствие 12.2. *Пусть $[a;b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок и $f \colon [a;b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Если $f(a) < c < f(b)$ или $f(a) > c > f(b)$, то существует такое $\xi \in [a;b]$, что $f(\xi) = c$.*

Для доказательства достаточно применить теорему 11.10 к функции $f(x) - c$ или $c - f(x)$.

Установив следствие 12.2, применим его к делу.

Предложение 12.3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для всякого действительного числа $x \geqslant 0$ существует и единственно такое действительное число $y \geqslant 0$, что $y^n = x$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $a > 0$. Положим $b = \max\{1, x\} + 1$. Тогда $0 < x < b$; поскольку функция $x \mapsto x^n$ непрерывна на отрезке $[0;b]$, следствие 12.2 показывает, что существует такой $y \in [0;b]$, что $y^n = x$. Единственность этого y следует из монотонности функции $x \mapsto x^n$ на $[0;+\infty)$. $\square$

Число y из предложения 12.3 называется, как мы знаем, корнем n-й степени из x и обозначается $\sqrt[n]{x}$. Далее, если $p = m/m$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, то полагаем, как обычно, $x^p = (\sqrt[n]{x})^m$. Теперь можно проверить все свойства корней и степени с рациональным показателем (все это содержится в школьном курсе: единственное, чего там не было — доказательства *существования* корня).

Теперь мы можем исследовать свойства корня n-й степени как функции; разумно начать с общего факта, который пригодится нам и в других случаях. Итак, пусть $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная и строго монотонная функция. Положим $f(a) = p$, $f(b) = q$. В силу монотонности f число $f(x)$ лежит между p и q для всякого $x \in [a;b]$, так что $f(x) \subset [p;q]$ (или $[q;p]$, если f убывающая). Далее, в силу непрерывности f и теоремы о промежуточном значении имеем $f([a;b]) = [p;q]$ (или $[q;p]$). Так как строго монотонная функция принимает в различных точках различные значения, получаем, что f осуществляет биекцию отрезка $[a;b]$ на $[p;q]$ (или $[q;p]$). Стало быть, определена обратная функция $f^{-1}\colon [p;q] \to [a;b]$ (с соответствующими изменениями, если f убывает).

Теорема 12.4. *Пусть $f\colon [a;b] \to [p;q] \subset \mathbb{R}$ — непрерывная и строго монотонная функция; тогда обратная к ней функция $g = f^{-1}\colon [p;q] \to [a;b]$ тоже непрерывна.*

Доказательство. Ввиду предложения 11.7 нам достаточно доказать следующее: если $\{y_n\}$ — последовательность точек отрезка $[p;q]$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in [p;q]$, то $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y) \in [p;q]$. Обозначим $g(y_j) = x_j$, $g(y) = x$; тогда $x_j = f(y_j)$, $x = f(y)$. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ ограничена, ввиду предложения 9.10 нам достаточно доказать, что всякая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ совпадает с x. Чтобы в этом убедиться, что так и есть, предположим, что ξ — предельная точка для $\{x_n\}$; это значит, что существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$. Поскольку f непрерывна, имеем

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

(если последовательность сходится к y, то к тому же пределу сходится и любая ее подпоследовательность). С другой стороны, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$ ввиду непрерывности функции f. Следовательно, $f(\xi) = y$, откуда ввиду строгой монотонности функции f получаем, что $\xi = g(y) = x$, что и требовалось. □

Следствие 12.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Q}$. Тогда функции $x \sqrt[n]{x}$ и $x \mapsto x^a$ непрерывны на $[0; +\infty)$.*

Давайте теперь научимся вычислять производную корня и степенной функции с рациональным показателем (точнее говоря, обоснуем правила, известные из школы). Тут тоже удобнее и разумнее доказать сразу общее утверждение.

Предложение 12.6. *Пусть $f\colon (a;b) \to (p;q)$ — непрерывная и монотонная биекция двух интервалов; положим $g = f^{-1}\colon (p;q) \to (a;b)$. Если f дифференцируема на $(a;b)$ и при этом $f'(\xi) \neq 0$ для всякого $\xi \in (a;b)$, то g дифференцируема на $(p;q)$ и $g'(y) = 1/f'(g(y))$ для всякого $y \in (p;q)$.*

Одно из возможных неформальных объяснений этой формулы выглядит так. Композиция $f \circ g$ — тождественная функция: $f(g(y)) = y$; производная тождественной функции равна единице. Поэтому из формулы для производной сложной функции имеем $1 = (f \circ g)'(y) = f'(g(y))g'(y)$, и остается только поделить на $f'(g(y))$. К сожалению, доказательством это рассуждение быть не может, так как при этом остается недоказанным сам факт существования производной у функции g. В строгом доказательстве, к которому мы сейчас перейдем, используется теорема 12.4.

Доказательство. Функция f непрерывна, так как она дифференцируема (лемма 10.13). Для начала покажем, что и функция g непрерывна (если вам понятно, как это доказать, можете продолжить чтение со следующего абзаца). В самом деле, для $y \in (p;q)$ существуют такие отрезки $[a_1;b_1] \subset (a;b)$ и $[p_1;q_1] \subset (p;q)$, что y — внутренняя точка в $[p_1;q_1]$, $g(y)$ — внутренняя точка в $[a_1;b_1]$ и f (точнее, ограничение f на отрезок $[a_1;b_1]$) задает монотонную биекцию $[a_1;b_1]$ на $[p_1;q_1] \subset (p;q)$. Ввиду теоремы 12.4 ограничение функции g на $[p_1;q_1]$ непрерывно, так что g непрерывна в точке y; ввиду произвольности выбора точки y функция g непрерывна на $(p;q)$.

Перейдем к основной части доказательства. Пусть $t \in (p;q)$, $t = f(u)$, $u = g(t)$. Нам необходимо установить, что

$$\lim_{y\to t} \frac{g(y) - g(t)}{y - t} = \frac{1}{f'(u)}.$$

Воспользуемся предложением 10.9. Пусть $\lim_{n\to\infty} y_n = t$, причем $g(y_n) = x_n$; ввиду непрерывности функции g имеем $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. Теперь запишем следующие равенства:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(t)}{y_n - t} = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - t}{g(y_n) - g(t)} = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(u)}{x_n - u} =$$
$$= 1/f'(u) = 1/f'(g(t))$$

(мы воспользовались теоремой о пределе частного и равенством $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(u)}{x_n-u}=f'(u)$ с учетом условия $f'(u)\neq 0$). Все доказано. $\square$

В качестве примера на эту теорему проверим равенство $(x^a)'=ax^{a-1}$ для $a\in\mathbb{Q}$. Пусть сначала $a=1/n$, $n\in\mathbb{N}$. Функция $g\colon t\mapsto\sqrt[n]{t}$ обратна к функции $f\colon u\mapsto u^n$. Поэтому

$$g'(t)=1/f'(g(t))=\frac{1}{n(g(t))^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(\sqrt[n]{t})^{n-1}}=\frac{1}{n}t^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1},$$

что и требовалось. Если же $a=m/n$, $n\in\mathbb{N}$, то мы воспользуемся еще формулой для производной сложной функции:

$$(x^{m/n})'=((x^{1/n})^m)'=m(x^{1/n})^{m-1}(x^{1/n})'=mx^{\frac{m-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}=$$
$$=\frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-n}{n}}=ax^{a-1}.$$

После степени с рациональным показателем хочется перейти к степени с произвольным показателем; гораздо удобнее, однако, определять ее не напрямую, а через посредство показательной функции. Этим мы сейчас и займемся.

При определении показательной функции, в свою очередь, удобно начать с показательной функции с основанием e (эту функцию называют еще экспонентой). Ее мы сейчас и определим (причем для произвольных комплексных значений аргумента). При этом, поскольку связь с числом e прояснится не сразу, удобно ввести для этой функции «запасное» обозначение. Таким обозначением будет exp.

Предложение-определение 12.7. Для всякого $z\in\mathbb{C}$ ряд

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

сходится; сумма этого ряда называется *экспонентой* числа z и обозначается $\exp(z)$.

Доказательство. При $z=0$ все очевидно. При $z\neq 0$ достаточно, ввиду признака абсолютной сходимости, доказать, что сходится ряд

$$1+|z|+\frac{|z|^2}{2!}+\ldots+\frac{|z|^n}{n!}+\ldots \tag{12.1}$$

Положим $|z|=r$ и применим признак Даламбера: отношение $(n+1)$-го члена к n-му равно $\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{r^n}{n!}=r/(n+1)$, что при $n\to\infty$ стремится к $0<1$. Стало быть, ряд (12.1) сходится, так что сходится и исходный ряд. $\square$

Заметим сразу же, что $\exp(0) = 1$ (очевидно) и $\exp(1) = e$ (см. лекцию 4). Основное свойство экспоненты содержится в следующем предложении.

Предложение 12.8. *Для любых $z, w \in \mathbb{C}$ имеем $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.*

Доказательство этого предложение разбивается на две части: алгебраическую и аналитическую. Начнем с алгебраической.

Доказательство предложения 12.8, часть 1. Перемножим формально ряды для $\exp(z)$ и $\exp(w)$ и приведем подобный, собрав слагаемые одной степени (суммарной по z и w):

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\right)\left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \ldots + \frac{w^n}{n!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + (z + w) + \left(\frac{z^2}{2!} + zw + \frac{w^2}{2!}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}w}{(n-1)!1!} + \frac{z^{n-2}w^2}{(n-2)!2!} + \cdots + \frac{w^n}{n!}\right) + \ldots;$$

в силу формулы бинома Ньютона слагаемое степени n равно $(z+w)^n/n!$; стало быть, после приведения подобных получится ряд для $\exp(z + w)$. Итак, наше предложение было бы доказано, если бы мы могли быть уверены, что в результате описанной выше манипуляции с двумя сходящимися рядами получается ряд, сумма которого равна произведению сумм двух исходных рядов. Сформулируем аккуратно, чего именно мы хотим.

Вопрос. *Пусть $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ и $b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots$ — два сходящихся ряда, суммы которых равны A и B соответственно. Верно ли, что ряд*

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) + \ldots \tag{12.2}$$

сходится к ab?

Было бы, наверное, хорошо, если бы ответ на этот вопрос был положителен, но — к счастью или к несчастью — в нужном нам случае рядов с комплексными (или действительными) членами ответ на него отрицателен (отметим, что он все-таки положителен в случае рядов из p-адических чисел, с которыми мы встретимся позже). Именно, приведем такой

Предостерегающий пример. Пусть, скажем, $\sum a_i$ и $\sum b_i$ — один и тот же знакомый нам ряд $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$. Тогда n-й член ряда (12.2) равен

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1}}\right),$$

то есть сумме n слагаемых одного знака, каждое из которых по модулю не меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{(n+1)/2}\cdot\sqrt{(n+1)/2}}=2/(n+1)$. Стало быть, общий член к нулю не стремится и произведение рядов расходится.

Итак, самый наивный способ обосновать рассуждение с перемножением рядов для $\exp(z)$ и $\exp(w)$ не проходит; тем не менее ответ на наш «вопрос» будет положителен, если наложить на ряды некоторые дополнительные условия (которым удовлетворяет ряд для экспоненты). Речь об этом пойдет на следующей лекции. $\square$