11. Производная (продолжение); непрерывные функции

На прошлой лекции мы вывели правило дифференцирования произведения функций; сейчас мы разберемся и с дифференцированием частного.

Заметим для начала, что равенство $\lim_{x\to a} f(x) = b$ равносильно равенству $\lim_{h\to 0} f(a+h) = b$ (формальное доказательство оставляем в качестве упражнения). В частности,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f}{h}.$$

Теперь сформулируем предложением, о котором шла речь.

Предложение 11.1. *(f/g)' Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, $a \in I$, и пусть $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ — функции, дифференцируемые в точке a, причем $g(a) \neq 0$. Тогда функция f/g также дифференцируема в точке a, причем*

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Доказательство. Докажем сначала частный случай, когда $f(x) = 1$ при всех x. Имеем

$$\frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h} = \frac{f(a) - f(a+h)}{h} \cdot \frac{1}{f(a)f(a+h)}.$$

К правой части применим свойства предела произведения и частного: первое слагаемое при $x \to a$ стремится, очевидно, к $-f'(a)$, а второе при $x \to a$ стремится к $1/f(a)^2$ ввиду леммы 10.13. Стало быть, при $g(a) \neq 0$ производная в точке a функции $x \mapsto 1/g(x)$ существует и равна $-g'(a)/g(a)^2$. Сокращенно это утверждение можно записать так:

$$(1/g)' = -g'/g^2.$$

Общий случай получается отсюда чисто формальной выкладкой: пользуясь еще правилом дифференцирования произведения 10.12, которое можно записать в виде $(fg)' = f'g + fg'$, получим:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = (f \cdot (1/g))' = f' \cdot (1/g) + f \cdot (1/g)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

что и требовалось. $\square$

Приведем несколько примеров вычисления производных.

Пример 11.2. Вычислим производную функции $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$. В точке $a \in \mathbb{R}$ имеем (в силу формулы бинома Ньютона)

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = na^{n-1} + \binom{n}{2}a^{n-2}h + \binom{n}{3}a^{n-3}h^2 + \ldots + h^{n-1};$$

ясно, что правая часть стремится к na^{n-1} при $h \to 0$. Итак, при $n \in \mathbb{N}$ функция $x \mapsto x^n$ дифференцируема всюду, и ее производная в точке a равна na^{n-1}. Обычно эту мысль выражают следующим образом: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Из нашего примера следует, что любой многочлен дифференцируем всюду, а любая рациональная функция — всюду, где она определена.

Пример 11.3. Приведем два примера отсутствия производной.

1. Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x}$; покажем, что у этой функции нет производной в нуле. В самом деле, если $x = 0$, то $(f(x+h) - f(x))/h = h^{-2/3}$, и предела при $h \to 0$ у этой функции нет.

2. Пусть $f(x) = |x|$; у этой функции тоже нет производной в нуле. В самом деле, если $x = 0$, то $(f(x+h) - f(x))/h$ равно 1 при $h > 0$ и -1 при $h < 0$; у такой функции предела при $h \to 0$ также, как легко видеть, нет.

Давайте теперь научимся дифференцировать композицию функций. Соответствующую формулу называют по традиции «правилом дифференцирования сложной функции».

Предложение 11.4. *Пусть $I_1 \subset \mathbb{R}$ — интервал, $g\colon I_1 \to \mathbb{R}$ — функция, причем $g(I_1)$ содержится в интервале $I_2 \subset \mathbb{R}$, и пусть $f\colon I_2 \to \mathbb{R}$ — еще одна функция. Если g дифференцируема в точке $a \in I_1$, а f дифференцируема в точке $g(a) \in I_2$, то композиция $f \circ g\colon I_1 \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, и*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Доказательство. Наивная попытка доказать это предложение выглядит так. Запишем равенство

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Теперь «ясно», что если $h \to 0$, то $g(a+h) \to g(a)$, так что первый сомножитель стремится к $f'(g(a))$, а второй — к $g'(a)$. Один недостаток этого рассуждения очевиден (замену переменной в пределе надо обосновать), но это сделать можно (см. ниже). Более серьезно другое: нет никакой гарантии, что знаменатель в первой дроби отличен от нуля! Поэтому рассуждать придется более аккуратно.

Мы воспользуемся предложением 10.9 и рассмотрим произвольную последовательность $\{h_n\}$, для которой $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ и $h_n \neq 0$ при всех n. Теперь возможны следующие два случая:

(а) существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $g(a+h_n) - g(a) \neq 0$ для всех $n \geqslant N$;

(б) существует такая подпоследовательность $\{h_{n_k}\}$, что $g(a+h_{n_k}) - g(a) \neq 0$ для всех k.

В случае (а) все просто: при всех $n \geqslant N$ будет выполняться равенство

$$\frac{f(g(a+h_n)) - f(g(a))}{h}_n = \frac{f(g(a+h_n)) - f(g(a))}{g(a+h_n) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h_n) - g(a)}{h_n}; \tag{11.1}$$

Теперь из леммы 10.13 следует, что $\lim_{n\to\infty} g(a+h_n) = g(a)$, так что теперь предложение 10.9 показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(a+h_n)) - f(g(a))}{g(a+h_n) - g(a)} = \lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(g(a))}{g(t) - g(a)} = f'(g(a));$$

поскольку второй сомножитель в (11.1) стремится к $g'(a)$, мы получаем, что в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(a+h_n)) - f(g(a))}{h_n} = f'(g(a))g'(a). \tag{11.2}$$

В случае (б) заметим, что $g(a+h_{n_k}) - g(a)/h_{n_k} = 0$ при всех k, так что

$$g'(a) = \lim_{k\to\infty} \frac{g(a+h_{n_k}) - g(a)}{h_{n_k}} = 0$$

(мы опять воспользовались предложением 10.9); поэтому чтобы установить равенство (11.2), нам достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(a+h_n)) - f(g(a))}{h_n} = 0.$$

Если $g(a+h_n) = g(a)$ для всех n, кроме конечного числа, то $\frac{f(g(a+h_n)) - f(g(a))}{h_n} = 0$ для всех n, кроме конечного числа, и искомое равенство очевидно. В противном случае существуют такие подпоследовательности $h_{m'_k}$ и $h_{m''_k}$, что $g(a+h_{m'_k}) - g(a) = 0$ при всех k,

$g(a+h_{m''_k})-g(a)\neq 0$ при всех k, и всякий номер $n\in\mathbb{N}$ имеет вид m'_r или m''_s. Равенство

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(g(a+h_{m'_k}))-f(g(a))}{h_{m'_k}}=0$$

очевидно, так как все члены последовательности в левой части равны нулю, а равенство

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(g(a+h_{m''_k}))-f(g(a))}{h_{m''_k}}=f'(g(a))g'(a)=0$$

устанавливается так же, как в случае (а). Легко видеть (упражнение!), что отсюда вытекает искомое равенство (11.2). $\square$

В таблице 1 собраны производные элементарных функций; хочется верить, что все эти формулы вам хорошо известны. Пока что из всех этих формул мы доказали только самую первую, да и то лишь в случае $a\in\mathbb{N}$; вскоре мы дадим строгие определения остальных функций, встречающихся в этой таблице, и докажем формулы для их производных.

А теперь введем чрезвычайно важное определение.

Определение 11.5. Пусть $I\subset\mathbb{R}$ — некоторый интервал (с включенными или не включенными концами, конечными или бесконечными). Функция $f\colon I\to\mathbb{C}$ называется *непрерывной в точке* $a\in I$, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Функция, непрерывная во всех точках интервала I, называется *непрерывной на* I.

Лемма 10.13, стало быть, утверждает, что всякая функция, дифференцируемая в точке a, автоматически непрерывна в этой точке.

Если вспомнить определение предела и предложение 10.9, то получатся следующие полезные переформулировки определения непрерывности.

Таблица 1. Производные элементарных функций

$f(x)$	x^a	a^x	e^x	$\log_a x$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	ax^{a-1}	$a^x\ln a$	e^x	$\frac{1}{x}\log_a e$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$

Предложение 11.6. *Функция* $f\colon I \to \mathbb{C}$ *непрерывна в точке* $a \in I$ *тогда и только тогда, когда для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$*, что из неравенства* $|x - a| < \delta$ *вытекает неравенство* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Предложение 11.7. *Функция* $f\colon I \to \mathbb{C}$ *непрерывна в точке* $a \in I$ *тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: для всякой последовательности* $\{x_n\}$ *точек интервала* I*, сходящейся к* a*, имеем* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Заметим, что в данном случае не нужны неприятные оговорки, присутствующие в определении предела ($x \neq a$, $x_n \neq a$).

Из «арифметики пределов» и определения 11.5 немедленно вытекают следующие свойства непрерывных функций.

Предложение 11.8. *Пусть* $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ *— непрерывные функции. Тогда:*

(1) Если f *и* g *непрерывны в точке* $a \in I$*, то и функция*

$$f + g\colon x \mapsto f(x) + g(x)$$

непрерывна в точке a*;*

(2) Если f *и* g *непрерывны в точке* $a \in I$*, то и функция*

$$fg\colon x \mapsto f(x)g(x)$$

непрерывна в точке a*;*

(3) Если f *и* g *непрерывны в точке* $a \in I$*, причем* $g(a) \neq 0$*, то и функция*

$$f/g\colon x \mapsto f(x)/g(x)$$

непрерывна в точке a. □

Легко доказывается и следующее важное свойство («непрерывность композиции»).

Предложение 11.9. *Пусть* $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ *— интервалы,* $g\colon I_1 \to \mathbb{R}$ *— функция, для которой* $g(I_1) \subset I_2$*, и пусть* $f\colon I_2 \to \mathbb{C}$ *— функция. Если функция* g *непрерывна в точке* $a \in I_1$*, а функция* f *непрерывна в точке* $g(a) \in I_2$*, то функция*

$$f \circ g\colon x \mapsto f(g(x))$$

непрерывна в точке a.

Доказательство. Предложение 11.7 позволяет провести доказательство в одну строчку:

$$x_n \to a \Rightarrow g(x_n) \to g(a) \Rightarrow f(g(x_n)) \to f(g(a)). \quad \square$$

Следующее свойство непрерывных функций очень важно.

Теорема 11.10 (теорема о промежуточном значении)**.** *Пусть* $[a;b] \subset \mathbb{R}$ *— отрезок и* $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ *— функция, непрерывная на всем* $[a;b]$. *Если* $f(a) > 0$ *и* $f(b) < 0$, *то существует такая точка* $c \in [a;b]$, *что* $f(c) = 0$.

Иными словами, если на графике непрерывной функции есть точки, лежащие по разные стороны от оси абсцисс, то этот график обязан пересекать ось абсцисс.

Доказательство. Положим $X = \{x \in [a;b] \mid f(x) > 0\}$. Поскольку $f(a) > 0$, множество X непусто, а так как $X \subset [a;b]$, оно ограничено. Поэтому у него есть верхняя грань. Положим $c = \sup X$ и покажем, что $f(c) = 0$. Доказательство проведем от противного. Если $f(c) \neq 0$, то либо $f(c) > 0$, либо $f(c) < 0$. Покажем, что ни то, ни другое невозможно.

Невозможность неравенства $f(c) > 0$. В самом деле, если $f(c) > 0$, то, полагая $\varepsilon = f(c)$, получаем, что найдется такое $\delta > 0$, что если $|x - c| < \delta$ и $x \in [a;b]$, то

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon = f(c) \Rightarrow f(x) > 0. \tag{11.3}$$

Поскольку $f(b) < 0$, имеем $c < b$; значит, существует такой $x > c$, что $x \in [a;b]$ и $x - c < \delta$. В силу (11.3) имеем $f(x) > 0$, так что $x \in X$; это противоречит тому, что $\sup X = c$.

Невозможность неравенства $f(c) < 0$. В самом деле, если $f(c) < 0$, то, полагая $\varepsilon = |f(c)|$, получаем, что найдется такое $\delta > 0$, что если $|x - c| < \delta$ и $x \in [a;b]$, то

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon = |f(c)| \Rightarrow f(x) < 0. \tag{11.4}$$

Поскольку $f(a) > 0$, имеем $c > a$; значит, существует такой $x < c$, что $x \in [a;b]$ и $c - x < \delta$. В силу (11.4) имеем $f(x') < 0$ при $x < x' < c$. Так как c — верхняя граница множества X, получаем, что всякое такое x' также будет его верхней границей, и это противоречит тому, что $c = \sup X$.

Итак, единственная возможность, не приводящая к противоречию — это равенство $f(c) = 0$. $\square$