1. Предел последовательности

Из школьного курса вы знаете, что действительные числа — это бесконечные десятичные дроби. Это определение не слишком строгое (точнее говоря, при таком определении довольно трудно определить арифметические действия над действительными числами и проверить их свойства наподобие распределительного умножения), но пока что будем руководствоваться им; в дальнейшем мы дадим и строгое определение.

Курс математического анализа начинается с определения предела последовательности.

Определение 1.1. Говорят, что число a является пределом последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что при всяком $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Последовательности, имеющие предел, называются *сходящимися*.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $a_n - \varepsilon < x < a_n + \varepsilon$; далее, интервал $(a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon)$ часто называют ε-*окрестностью* числа a. Тогда определение 1.1 можно переформулировать еще так, для всякой окрестности числа a существует такое n, что x_n лежит в этой окрестности при всех $n > N$.

Пример 1.2. Пусть $x_n = 1/(2n+3)$. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} = 0$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ выберем натуральное $N > 1/\varepsilon$. Тогда при $n > N$ имеем

$$0 < x_n = \frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

и подавно $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$.

Первое свойства предела последовательности состоит в том, что если он существует, то он единственен.

Предложение 1.3. *Пусть $\{x_n\}$ — последовательность действительных чисел; если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, то $a = b$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, пусть $a \neq b$. Тогда при достаточно малых ϵ оказывается, что ε-окрестности точек a и b не пересекаются (например, годится $\varepsilon = |a - b|/2$ — сделайте чертеж!). Зафиксируем такое ε; тогда виду условия существуют такие натуральные N_1 и N_2, что при всяком $n > N_1$ число x_n лежит в ε-окрестности точки a и всяком $n > N_2$ число x_n лежит в ε-окрестности точки b; если теперь ваять какое-нибудь $n > \max(N_1, N_2)$, то окажется, что x_n лежит одновременно в ε-окрестности точки a и в ε-окрестности точки b, а это невозможно ввиду нашего выбора ε. $\square$

На практике пределы редко находят прямо по определению, как в нашем примере 1.2; обычно сводят более сложные пределы к более простым с помощью правил, известных под общим названием «арифметики пределов». Вот первое из этих правил.

Предложение 1.4. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, *то существует и предел последовательности* $\{x_n + y_n\}$, *причем* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Доказательство. Пусть нам дано $\varepsilon > 0$. Тогда ввиду определения предела существуют такие натуральные числа N_1 и N_2, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$, как только $n > N_1$ и $|x_n - b| < \varepsilon/2$, как только $n > N_2$. Положим теперь $N = \max(N_1, N_2)$. Если теперь $n > N$, то

$$|(x_n+y_n)-(a+b)| = |(x_n-a)+(y_n-b)| \leqslant |x_n-a|+|y_n-n| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$. $\square$

Коротко говоря, предел суммы равен сумме пределов. Два следующих утверждения про арифметику пределов доказываются аналогично предложению 1.4; их доказательство предоставляется читателю.

Предложение 1.5. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, *то существует и предел последовательности* $\{x_n - y_n\}$, *причем* $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$.

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *и* k *— произвольное действительное число, то существует и предел последовательности* $\{kx_n\}$, *причем* $\lim_{n\to\infty}(kx_n) = ka$.

Аналогичное утверждение верно и для предела произведения, но доказывается оно немного сложнее. Для начала определим одно понятие, которое пригодится нам и в дальнейшем.

Определение 1.6. Последовательность действительных числе $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если выполнено одно из двух следующих равносильных условий:

– существует такое $M > 0$, что $|x_n| \leqslant M$ при всех n;

– существует такой отрезок $[P; Q]$, что все x_n лежат на этом отрезке.

Лемма 1.7. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Взяв в определении предела $\varepsilon = 1$, получаем, что существует такое натуральное N, что при всяком $n > N$ число x_n лежит на интервале $[a-1; a+1]$. Поскольку членов последовательности x_n, где $n < N$, конечное число, получаем, что существует отрезок $[P; Q]$, содержащий $[a-1; a+1]$ и все x_n, где $n < N$. Ясно, что $[P; Q]$ содержит вообще все x_m, а это и означает, что последовательность ограничена. $\square$

Вооружившись этой леммой, мы можем доказать, что предел произведения равен произведению пределов.

Предложение 1.8. *Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то существует и предел последовательности $\{x_n y_n\}$, причем $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.*

Доказательство. По лемме 1.7 последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены; тем самым существует такое число $M > 0$, что $|x_n| \leqslant M$ и $|x_n| \leqslant M$ при всех n, а также $|a| \leqslant M$, $|b| \leqslant M$. Заметим, что

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| = |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \leqslant \\ \leqslant |x_n| \cdot |y_n - b| + |x_n - a| \cdot |b| \leqslant M \cdot |y_n - b| + M \cdot |x_n - a|.\end{aligned}$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$; ввиду условия существует такое N_1, что $|x_n - a| < \varepsilon/2M$ при $n > N_1$, а также такое N_2, что $|y_n - a| < \varepsilon/2M$ при $n > N_2$. Если положить $N = \max(N_1, N_2)$, то при $n > N$ имеем

$$|x_n y_n - ab| \leqslant M \cdot |y_n - b| + M \cdot |x_n - a| < M \cdot (\varepsilon/2M) + M \cdot (\varepsilon/2M) = \varepsilon,$$

и все доказано. $\square$

Утверждение про предел частного также верно, но требует некоторой аккуратности в формулировке.

Предложение 1.9. *Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$, то существует и предел последовательности $\{x_n/y_n\}$, причем $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b$.*

Доказательство. Поскольку $x_n/y_n = x_n(1/y_n)$, ввиду предложения 1.8 достаточно доказать следующее:

если $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty}(1/y_n) = 1/b$.

Для доказательства положим в определении предела $\varepsilon = |b|/2 > 0$; тогда существует такое натуральное N_1, что при $n > N_1$ имеем

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow |1/y_n| \leqslant \frac{2}{|b|}.$$

Кроме того, ввиду леммы 1.7 существует такое $M > 0$, что $|y_n| \leqslant M$ при всех n. Следовательно, при $n > N_1$ имеем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} = \frac{1}{|y_n|} \cdot \frac{1}{|b|}|y_n - b| \leqslant \frac{2}{|b|}\frac{1}{|b|}|y_n - b| = \frac{2}{|b|^2}|y_n - b|.$$

Теперь для данного $\varepsilon > 0$ найдем такое натуральное N_2, что $|y_n - b| < (|b|^2/2)\varepsilon$ при $n > N_2$; тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ имеем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \leqslant \frac{2}{|b|^2}|y_n - b| < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Все доказано. □

В формулировке предложения 1.9 мы (сознательно) допустили одну небрежность: мы нигде не оговорили, что $y_n \neq 0$ при всех n, так что, формально говоря, нет гарантии, что выражение x_n/y_n определено при всех n. Эта небрежность на самом деле ничему не мешает: из доказательства предложения видно, что $y_n \neq 0$ для всех n, кроме конечного числа, а для оставшегося конечного числа номеров n можно придать выражениям x_n/y_n произвольные значения, и на предел это не повлияет. Вообще, ни сходимость последовательности, ни значение ее предела не изменится, если изменить конечное число ее членов.

Еще одно полезное свойство пределов известно под названием *теоремы о двух милиционерах.*

Предложение 1.10. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ — такие последовательности действительных чисел, что $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ при всех n и $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.*

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ существует такое N_1, что x_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ при всех $n > N_1$, и существует такое N_2, что y_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ при всех $n > N_2$. Если $x \leqslant y \leqslant z$ и при этом x и z лежат на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, то и y лежит на этом же интервале; поэтому при всех $n > \max(N_1, N_2)$ точка y_n лежит на интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, что и требовалось. □

В листке 1 вы найдете еще некоторое количество элементарных свойств пределов; кроме того, в процессе решения этого листка вы самосточятельно определите понятие «последовательность стремится кбесконечности». Всеми этими свойствами и понятиями мы в дальнейшем будем свободно пользоваться.

В различных ситуациях бывает необходимо установить существования предела последовательности a priori, не вычисляя предела в явном виде. Сформулируем один результат в этом направлении.

Определение 1.11. Последовательность x_n называется *монотонно возрастающей*, если $x_m \leqslant x_n$ всякий раз, когда $m < n$, и *монотонно убывающей*, если $x_m \geqslant x_n$ всякий раз, когда $m < n$.

Теорема 1.12. *Всякая монотонно возрастающая последовательность имеет предел.*

Строго доказать мы ее сможем только тогда, когда дадим строгое определение действительных чисел, а пока что обоснование, которое мы дадим, будет с неизбежностью нестрогим.

Нестрогое доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — монотонно возрастающая и ограниченная последовательность; тогда имеется такое действительное M, что $x_n \leqslant M$ при всех n. Представим все члены последовательности в виде бесконечных десятичных дробей; последовательность целых частей чисел x_n также, очевидно, будет монотонно возрастающей, и при этом все эти целые части не превосходят M; значит, начиная с какого-то момента все целые части будут одинаковы и совпадать с некоторым целым числом m.

Далее, у членов последовательности, имеющих целой частью это число m, рассмотрим первые десятичные знаки после запятой (для определенности будем считать, что в десятичных записях отсутствуют бесконечные «хвосты» девяток). Последовательность этих десятичных знаков также монотонно возрастает, так что начиная с какого-то места все эти знаки будут одинаковы; обозначим соответствующий десятичный знак через m_1. У членов последовательности с целой частью m и первым десятичным знаком m_1 рассмотрим вторые знаки после запятой: они также будут возрастать и тем самым «стабилизируются» на каком-то знаке m_2, и т. д. Положим теперь

$$x = \overline{m{,}m_1 m_2 m_3 \ldots}$$

и покажем, что $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $10^{-N} < \varepsilon$. Пусть номер N таков, что у числа x_N

стабилизировались уже целая часть и первые N знаков после запятой. Тогда $0 \leqslant x - x_N \leqslant 10^{-N} < \varepsilon$; если $n > N$, то, очевидно, $x_N \leqslant x_n \leqslant x$, так что $|x - x_n| \leqslant |x - x_N| < \varepsilon$. Ввиду произвольности выбора ε все доказано. $\square$