

Листок 9 (ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ; ПРОИЗВОДНАЯ)

1. Докажите, что если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существует, то он единственен.
2. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = b$ .
3. а) Дайте определение понятия «предел  $f(x)$  при стремлении  $x$  к  $a$  справа равен  $b$ » (обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ ) на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ . б) Докажите единственность такого предела, если он существует. в) Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ .
4. Докажите (не пользуясь пределами последовательностей), что если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  и  $b \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = a/b$ .
5. Дайте определение понятия  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (в определении не должны использоваться пределы последовательностей).
6. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$ . Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow a} (1/f(x)) = 0$ .
7. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b > 0$ . Докажите, что существует такое  $\delta > 0$ , что  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$ .

Найдите производные следующих функций:

8.  $\ln(x + 1) - \ln(x - 1)$ .
9.  $x(\ln x - 1)$ .
10. а)  $y = \sin 2x$ ; б)  $y = \sin(\sin 2x)$ ; в)  $y = \sin(\sin(\sin x))$ .
11. а)  $\ln(\sin x)$ ; б)  $\ln(\cos x)$ .