

Листок 8 (ряды с произвольными членами)

В некоторых из задач вам может помочь признак Дирихле.

1. а) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — некоторый ряд, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходящийся ряд с положительными членами. Предположим, что существуют такие $C > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $|a_n| \leq Cb_n$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. б) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — некоторый ряд, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходящийся ряд с положительными членами. Предположим, что существует (конечный) предел $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|/b_n$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Рассмотрим ряд

$$\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \dots \pm \frac{1}{n} \pm \dots,$$

в котором вместо \pm проставлены знаки «плюс» или «минус» таким образом, что нигде не стоит подряд более чем 100 одинаковых знаков. Всегда ли такой ряд сходится?

3. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^s)$ сходится при некотором $s \in \mathbb{R}$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^t)$ сходится при всех $t > s$.

4. Для каких $z \in \mathbb{C}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n)$?

5. Для каких $x \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$?

6. Сходятся ли следующие ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^2}$?

7. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{d(n)}}{n}$, где $d(n)$ — количество (натуральных) делителей числа n (включая 1 и n)?

8. (Расшатываем признак Дирихле.) а) Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — такие последовательности действительных чисел, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и частичные суммы $\sum_{j=1}^n b_j$ ограничены по модулю некоторым числом, не зависящим от n . Покажите, что при выполнении этих условий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ может расходиться. б) Пусть в пункте (а) мы добавили условие « $a_n > 0$ для всех n ». Обязан ли теперь сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

9. Пусть ряд (из действительных чисел) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится. а) Следует ли из этого, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится? б) Следует ли из этого, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$ сходится?