Листок 7 (свойства полноты и прочее)

1. Дайте определение фундаментальной последовательности комплексных чисел и докажите, что последовательность комплексных чисел имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

2. Приведите пример последовательности действительных чисел, имеющей в $\mathbb{R}$ только одну предельную точку, но не имеющей предела.

3. Пусть последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ ограничена снизу, неограничена сверху и не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. (Указание: вспомните, как доказывается существование верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности.)

4. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — ограниченное множество и $a = \sup X$. Докажите, что существует такая последовательность действительных чисел $\{x_n\}$, что $x_n \in X$ при всех n и $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

5. Найдите верхний и нижний пределы следующих последовательностей: а) $x_n = (-1)^n$; б) $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$; в) $x_n = (-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$; г) $x_n = f(n)$, где $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap (0;1)$ — некоторая биекция; д*) $x_n = \varphi(n)/n$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

6. Существует ли последовательность действительных чисел, для которой каждая точка числовой оси является предельной?

7. Найдите радиусы сходимости следующих степенных рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n-1)^{n^2}} x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^n/n)$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n!)$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n$, где $d(n)$ — количество натуральных делителей числа n (включая 1 и n). (Указание: в некоторых из этих задач можно обойтись и без формулы Коши—Адамара.)