

Листок 5 (ряды)

Исследуйте на сходимость ниже следующие ряды.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$ .
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}$  где  $\alpha > 0$ .
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  при всевозможных  $x \in \mathbb{R}$ .
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  при всевозможных  $x \in \mathbb{R}$ .
5.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ .
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ .

7. Докажите, что ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

сходится при всех  $z \in \mathbb{C}$  (позднее мы увидим, что его сумма равна  $e^z$ ).

8. а) Докажите, что при  $0 < z < 1$  выполнено равенство

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

(то есть что ряд в правой части сходится и его сумма равна выражению в левой части).

б)\* Докажите, что это же верно для всякого комплексного  $z$ , удовлетворяющего условию  $|z| < 1$ .

9\*. а) Покажите, что при всяком  $s > 1$  выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1^s}\right)} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_2^s}\right)} \dots \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)},$$

где  $p_n$  —  $n$ -е по порядку простое число ( $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ ).

б) Сходится ли ряд

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} + \dots?$$