

ЛИСТОК 4 (ВСЕ ЕЩЕ ПРЕДЕЛЫ)

1. а) Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}}.$$

б) Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$

2. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{5^n + 6^n}$.

3. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/n^n$

4. а) Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha}$, где $\alpha > 0$;

б) Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \alpha^n}$, где $\alpha > 0$;

в) Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

5. Найдите следующие пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

6. Пусть $a > b > 0$; определим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следующим образом: $a_1 = 1$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. а) Покажите, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся. б) Покажите, что они сходятся к одному пределу.

7. а*) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$; покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = a.$$

б) Покажите, что обратное неверно.

8. Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

а) для случая, когда $\alpha \in \mathbb{N}$; б) для случая, когда α — произвольное положительное число.