

Листок 3' (дополнительный): ТРУДНЫЕ ЗАДАЧКИ

Этот листок сугубо необязательный: даже если вы не решите из него *ни одной* задачи, это никак не понизит ваших оценок, рейтингов и пр.

В некоторых задачах используются понятия, которые в курсе еще не определены.

В трех первых задачах единственное свойство действительных чисел, которое разрешается использовать — существование предела у монотонной ограниченной последовательности.

**1.** Пусть  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$  — последовательность вложенных отрезков на вещественной прямой. Докажите, что  $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$  (пересечение всех отрезков непусто).

**2.** Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}$  — два подмножества, обладающие тем свойством, что для всяких  $a \in A$  и  $b \in B$  выполнено неравенство  $a \leq b$ . Покажите, что существует такое число  $x \in \mathbb{R}$ , что  $a \leq x \leq b$  для всех  $a \in A$  и  $b \in B$ .

**3.** Докажите, что всякое ограниченное сверху подмножество в  $\mathbb{R}$  имеет точную верхнюю грань.

**4.** а) Какова мощность множества все открытых подмножеств плоскости? б) Какова мощность множества всех непрерывных функций на отрезке  $[0; 1]$ ?

**5.** Пусть  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел. Существует ли подмножество  $S \subset 2^{\mathbb{N}}$ , обладающее следующими двумя свойствами: а) если  $X \in S$ ,  $Y \in S$ , то либо  $X \subseteq Y$ , либо  $Y \subseteq X$ ; б) мощность множества  $S$  — континуум?

**6\*.** Существует ли непрерывная функция на отрезке  $[0; 1]$ , обладающая следующим свойством: для всякого  $a \in [0; 1]$  множество  $f^{-1}(a)$  имеет мощность континуум?