

ЛИСТОК 3 (И СНОВА ПРЕДЕЛЫ)

1. Найдите пределы следующих последовательностей: а)  $x_n = 1/\sqrt[3]{n}$ ; б)  $x_n = 1/(\sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n})$ ; в)  $x_n = \sin n/\sqrt[3]{n}$ ; г)  $x_n = 1/p_n$ , где  $p_n$  —  $n$ -е по порядку простое число.

2. Пусть  $x_n \geq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$ .

3. а) Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$  (указание: воспользуйтесь теоремой о двух милиционерах). б) Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin a$

4. Пусть  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — сходящаяся последовательность. Докажите, что сходятся следующие последовательности: а)  $a_n = x_{n+1}$ ; б)  $b_n = x_{n-1}$  (при  $n = 1$  это не определено, и мы положим для определенности  $b_1 = 0$ ; изменится ли результат, если положить  $b_1$  равным другому числу?); в)  $c_n = x_{n^2}$ ; г)  $d_n = x_{[\sqrt{n}]}$  (квадратные скобки обозначают целую часть).

5. (а–г) Пусть, напротив, в условиях предыдущей задачи дано, что сходится последовательность  $\{a_n\}$  (соотв.  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ ,  $\{d_n\}$ ). Следует ли из этого, что сходится последовательность  $\{x_n\}$ ?

6. а) Пусть  $f$  — функция, определенная на  $\mathbb{R}$ . Дайте определение («с помощью  $\varepsilon$  и  $M$ ») следующего понятия: «предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  равен  $a$ » (обозначение:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ).

б) Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ .