Листок 22 (мера и вокруг)

1. Пусть I — несчетное множество индексов и $\{a_i\}_{i\in I}$ — семейство положительных чисел, пронумерованное элементами I. Докажите, что

$$\sup_{\substack{S\subset I \\ S \text{ конечно}}} \sum_{j\in S} a_j = +\infty.$$

2. Пусть X — топологическое пространство. Покажите, что наименьшая σ-алгебра подмножеств в X, содержащая все замкнутые подмножества, совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств.

3. Покажите, что наименьшая σ-алгебра подмножеств в $\mathbb{R}$, содержащая все интервалы вида $[a,b)$, совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств.

4. Покажите, что наименьшая σ-алгебра подмножеств в $\mathbb{R}$, содержащая все интервалы вида $[a,b)$, где $a,b\in\mathbb{Q}$, совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств.

5. Пусть $A_1\subset A_2\subset\dots$ — бесконечная возрастающая последовательность измеримых подмножеств в пространстве с мерой μ. Докажите, что $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

6. Пусть $A_1\supset A_2\supset\dots$ — бесконечная убывающая последовательность измеримых подмножеств в пространстве с мерой μ, и пусть $\mu(A_1)<+\infty$. Докажите, что $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$, и покажите, что условие $\mu(A_1)<+\infty$ отбросить нельзя.

7. Найдите (лебеговскую) меру множества чисел из отрезка $[0;1]$, в десятичной записи которых не встречается цифра 7.

8. Найдите меру множества чисел на интервале $(0;1)$, в десятичной записи которых первая двойка встречается раньше первой тройки.

9. Для $x\in(0;1)$ и $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $f_n(x)$ количество семерок среди первых n знаков после запятой в десятичной записи числа x. Докажите, что для почти всех $x\in(0;1)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)/n = 1/10$.

10. Пусть $f\colon[0;1]\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция. Определим функцию $g\colon\mathbb{R}\to[0;+\infty]$ по формуле

$$g(c) = \{\text{количество элементов в множестве } f^{-1}(c)\}.$$

Покажите, что g измерима относительно σ-алгебры борелевских подмножеств в $\mathbb{R}$.

11. Пусть $E\subset[0;1]$ — измеримое по Лебегу множество, обладающее тем свойством, что для всякого отрезка $[a;b]\subset[0;1]$ имеем $\mu(E\cap[a;b]) = (b-a)\mu(E)$. Докажите, что $\mu(E)$ равна нулю или единице.

12. Приведите пример нигде не плотного (и измеримого) подмножества отрезка, имеющего положительную меру.

13. Для каждого $\varepsilon\in[0;1]$ постройте измеримое подмножество $E\subset[0;1]$, для которого $\bar{E}=[0;1]$ и $\mu(E)=\varepsilon$.