

Листок 21 (ИНТЕГРАЛЫ, АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, РЯДЫ)

1. Постройте кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\rho = \cos \varphi$.
2. Постройте кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\rho = \cos 2\varphi$.
3. Кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Найдите длину этой кривой.

В задачах 4–6 мы предполагаем без доказательства, что y в окрестности нуля выражается как аналитическая функция от x .

4. Пусть $y + e^y = x + 1$, $y = f(x)$. Найдите $f^{(3)}(0)$.
5. Пусть $2y - \sin y = x$. Найдите $f^{(3)}(0)$.
6. Пусть $x - y + x^3 + y^3 = 0$, $y = f(x)$. Найдите $f^{(3)}(0)$.
7. Пусть F — многочлен от двух переменных, причем $F(x, y) = 0$ и

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \neq 0.$$

Покажите, что в окрестности нуля определена аналитическая функция φ , удовлетворяющая тождеству $F(x, \varphi(x)) = 0$.

8. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — сходящийся ряд из целых p -адических чисел. Покажите, что любая перестановка этого ряда также сходится, причем к той же сумме.
9. Пусть $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ — двойной ряд из целых p -адических чисел. Покажите, что следующие два условия равносильны: (а) ряд $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ сходится; (б) ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ сходится для всякого j , и если обозначить сумму этого ряда через b_j , то ряд $\sum b_j$ тоже сходится.
- 10*. Кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\varphi)$ таким образом, что при параметризации ее через φ вектор скорости в каждой точке имеет длину 1. Докажите, что эта кривая является дугой окружности.