

Листок 20 (ИНТЕГРАЛЫ И ПРОЧЕЕ)

Если в выражении, которое нужно проинтегрировать, встречается $\sqrt{1-x^2}$, то может помочь замена $x = \sin t$; при работе с выражением $\sqrt{1+x^2}$ может помочь замена $x = \operatorname{sh} t$ (напомним, что $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$). Корни из прочих квадратных трехчленов можно свести к вышеупомянутым с помощью выделения полного квадрата.

Найдите интегралы:

1. $\int \sqrt{1+x-x^2} dx$.
2. $\int x dx / \sqrt{x^2-x+1}$ (функции arsh в ответе присутствовать не должно!).
3. Найдите длину кривой, заданной параметрически $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in [0; 1]$.

Рациональное выражение от $\sin x$ и $\cos x$ всегда можно свести к интегралу от рациональной функции, сделав замену $x = \operatorname{tg}(t/2)$. Иногда можно обойтись и меньшей кровью.

4. Найдите интеграл $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$.
5. Найдите интеграл $\int dx / (\sin x + \cos x)$.
6. Найдите интеграл $\int x \sqrt{1+x} dx$.

При построении кривых, заданных параметрически, производная также помогает: с ее помощью можно находить направление касательного вектора. Постройте следующие кривые, заданные параметрически:

7. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.
8. $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t^2$.
9. $x = t^2 - t + 1$, $y = t^3 - 3t^2 + 1$.

10. Найдите длину участка кривой из задачи 7, соответствующего значениям параметра $t \in [0; 2\pi]$.

Пусть f и g — две функции. Говорят, что $f \sim g$ при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$, и что $f \simeq g$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$. (Аналогичные обозначения применяются для последовательностей, для $x \rightarrow \infty$ и т.п.)

«Найти асимптотику для f » означает «найти такую g , что $f \sim g$ (или хотя бы $f \simeq g$)». При этом подразумевается, что g должна быть «проще», чем f .

11. Найдите асимптотику с точностью до \sim для $f(x) = 1 - \cos x$ при $x \rightarrow 0$.
12. Найдите асимптотику с точностью до \sim для $f(x) = \sin(\pi/6^x) - 1/2$ при $x \rightarrow 1$.
13. Найдите асимптотику с точностью до \sim для функции $f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\sin t} dt$ при $x \rightarrow 0$.

Найдите асимптотику (с точностью до \sim) для таких последовательностей:

14. $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ (при $\alpha > 0$).
15. $a_n = \sqrt[3]{n^5 - 3n + 2009}$.
16. a_n — n -й в порядке возрастания положительный корень уравнения $\operatorname{ctg} x = x$.

17. a_n — корень уравнения $x^7 + nx - 1 = 0$.

18. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$.

19. $a_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$.