

Листок 2 (ПРЕДЕЛЫ И ЧУТЬ-ЧУТЬ МНОЖЕСТВ — ИЛИ НАОБОРОТ?)

1. Пусть $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \sin x_n$ при всех n . Докажите, что последовательность сходится, и найдите ее предел.
2. Сходится ли последовательность $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$? (Если нет, докажите, если да, найдите ее предел.)
3. Сходится ли последовательность $a_n = \ln(n+1) - \ln n$? (Если нет, докажите, если да, найдите ее предел.)

4. Пусть

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n}$$

(знаки чередуются). Докажите, что эта последовательность сходится (указание: см. задачу 3 из первого листка).

5. Постройте в явном виде биекцию между интервалами $[0; 1)$ и $(0; 1)$.
6. Рассмотрим следующие шесть «тождеств».

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C); & A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C); \\ A \setminus (A \setminus B) &= B; & B \cup (A \setminus B) &= A; \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C); & A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

Из этих «тождеств» два на самом деле неверны (а остальные верны).

а) Выявите неверные тождества. б) Докажите верные. в) Неверные тождества из этого набора можно превратить в верные соотношения, заменив знак равенства на \subseteq или \supseteq . Проведите соответствующие замены.

7. а) Что можно сказать о мощности множества всевозможных конечных последовательностей натуральных чисел? б) А если заменить слово «натуральных» на «рациональных»?