Листок 18 (равномерная непрерывность, равномерная сходимость)

В задачах 1–5 требуется выяснить, является ли функция f равномерно непрерывной на множестве X. Утверждения о равномерной непрерывности или отсутствии таковой должны быть строго доказаны.

1. $f(x) = 2x + 1$, $X = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $X = \mathbb{R}$.

3. $f(x) = x^2$, $X = \mathbb{R}$.

4. $f(x) = \ln(2 + \sin x)$, $X = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = \sqrt{x}$, $X = [0; +\infty)$.

6. Пусть функция $f\colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена. Следует ли из этого, что f равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$?

7. Пусть функция $f\colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Докажите, что $f(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$.

В задачах 8–12 надо про последовательность функций $\{f_n\}$ выяснить, является ли она равномерно сходящейся на множестве X. Утверждения о равномерной сходимости или отсутствии таковой должны быть строго доказаны.

8. $f_n(x) = x^n$, $X = [0; 1]$.

9. $f_n(x) = \sin(n^2 x)/n$, $X = \mathbb{R}$.

10. $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $X = \mathbb{R}$.

11. $f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$, $X = [0; 0.999]$.

12. $f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n$, $X = [0; 1]$.

13. Пусть функция $f\colon [0; 1] \to \mathbb{R}$ задана так: $f(x) = 1/x$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Является ли f пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций?

14. Пусть ограниченная функция $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ является пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций. Докажите, что множество точек разрыва функции f не более чем счетно.

15. Пусть функция $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ ограничена, а множество ее точек разрыва не более чем счетно. Следует ли из этого, что f является пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций?

16. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций на отрезке $[a; b]$ с тем свойством, что последовательность $\{f_n(x)\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной для всякого $x \in [a; b]$, причем функция

$$x \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

непрерывна на $[a; b]$. Докажите, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f равномерно на $[a; b]$.