

Листок 17 (полнота)

В каждом из следующих примеров выясните, является ли описанное в них метрическое пространство полным; если оно неполно, найдите явное описание для его пополнения.

1. Множество \mathbb{R} с расстоянием $\rho(a, b) = |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b|$.
2. Интервал $(-\pi/2; \pi/2)$ с расстоянием $\rho(a, b) = |\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b|$.
3. l^∞ — множество ограниченных последовательностей; если $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$, то $\rho(a, b) = \sup |a_n - b_n|$.
4. Ω — множество отрезков на числовой прямой (точки отрезками не считаются); для отрезков $S_1 = [a_1; b_1]$ и $S_2 = [a_2; b_2]$ полагаем $\rho(S_1, S_2) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$.
5. Ω — множество отрезков на числовой прямой (точки отрезками не считаются); для отрезков $S_1, S_2 \in \Omega$ полагаем $\rho(S_1, S_2) = l(S_1 \cup S_2) - l(S_1 \cap S_2)$, где через l обозначена длина отрезка или объединения отрезков (длина одноточечного или пустого множества считается равной нулю). Не забудьте доказать, что функция ρ является метрикой.
6. Покажите, что множество чисел из отрезка $(0; 1)$, в десятичной записи которых не встречается последовательность 142857, является нигде не плотным. (Десятичные записи с бесконечным «хвостом» девяток запрещены.)
7. Можно ли множество иррациональных чисел представить в виде объединения счетного семейства замкнутых подмножеств в \mathbb{R} ?

Во избежание путаницы напомним, что \mathbb{Z}_p — это не кольцо вычетов по модулю p , а кольцо целых p -адических чисел.

8. Пусть $p > 2$ и $u \in \mathbb{Z}_p$ не делится на p . Покажите, что u является в \mathbb{Z}_p полным квадратом (т. е. существует $x \in \mathbb{Z}_p$, для которого $x^2 = u$) тогда и только тогда, когда u сравнимо по модулю p с квадратом целого числа (т. е. существует $m \in \mathbb{N}$, для которого $m^2 - u$ делится на p).
9. Выясните, какие элементы в \mathbb{Z}_2 являются полными квадратами.
10. Рассмотрим \mathbb{Z}_p и \mathbb{R} как группы по сложению. Какие существуют гомоморфизмы из \mathbb{Z}_p в \mathbb{R} , являющиеся непрерывными отображениями?
11. Какие существуют непрерывные гомоморфизмы из \mathbb{Z}_p , рассматриваемого как группа по сложению, в окружность (т. е. группу комплексных чисел, равных единице по модулю, с умножением в качестве операции)?