Листок 16 (компактность, связность)

Напомним из курса топологии, что отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, биективно и обратное к нему отображение также непрерывно. Топологические пространства, между которыми существует гомеоморфизм, называются *гомеоморфными*.

1. а) Докажите, что $\mathbb{R}$ и интервал $(0;1)$ гомеоморфны. б) Докажите, что диск $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ гомеоморфен $\mathbb{R}^2$.

2. а) Приведите пример непрерывной биекции хаусдорфовых пространств, не являющейся гомеоморфизмом. б) Приведите пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом, между *линейно связными* хаусдорфовыми пространствами.

3. Пусть X — компактное пространство, Y — хаусдорфово пространство и $f\colon X \to Y$ — непрерывная биекция. Покажите, что f является гомеоморфизмом.

4. а) Пусть $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^2$ — два непересекающихся компактных подмножества. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon$ при всяких $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$.

б) Верно ли аналогичное утверждение с заменой слова «компактный» на «замкнутый»?

5. Пусть $f(z) = a_n z^n + \ldots + z_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что функция $z \mapsto |f(z)|$ принимает на $\mathbb{C}$ наименьшее значение. (Если $\deg f > 0$, то это наименьшее значение, как известно, равно нулю.)

6. Покажите, что интервалы $(0;1)$ и $[0;1]$ негомеоморфны.

7. а) Пусть K — компактное хаусдорфово пространство, $x \in K$, и пусть $Y \subset K$ — замкнутое подмножество, не содержащее x. Докажите, что существуют непересекающиеся открытые подмножества $U, V \subset K$, для которых $U \ni x$ и $V \supset Y$. б) Пусть K — компактное хаусдорфово пространство, и пусть $X, Y \subset K$ — непересекающиеся замкнутые подмножества. Докажите, что существуют непересекающиеся открытые подмножества $U, V \subset K$, для которых $U \supset X$ и $V \supset Y$.

8. Покажите, что открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

9. Покажите, что интервалы $(0;1)$ и $[0;1)$ негомеоморфны.

10. Если X — произвольное топологическое пространство, то положим

$$X^n = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n\text{ раз}}.$$

Положим $I = [0;1]$. Докажите, что I негомеоморфен I^n при $n > 1$ («отрезок негомеоморфен n-мерному кубу при $n > 1$»). (Из курса топологии в этом семестре вы, видимо, научитесь доказывать, что I^2 негомеоморфно I^n при $n > 2$, а позднее — что и вообще I^m негомеоморфно I^n при $m \neq n$.)

11. Обозначим через $X \subset \mathbb{R}^2$ объединение графика функции $y = \sin(1/x)$ и отрезка, соединяющего точки $(0;1)$ и $(0;-1)$. Покажите, что X связно, но не линейно связно.