Листок 15 (топологические пространства)

Все задачи из этого листка содержательно чрезвычайно просты: их решение сводится к аккуратной расшифровке определений и тем самым требует не сообразительности, но усидчивости.

1. Пусть X — топологическое пространство и $A \subseteq X$. *Замыканием* множества A называется подмножество $\bar{A} \subseteq X$, являющееся пересечением всех замкнутых множеств, содержащих A.

(а) Покажите, что

$$\bar{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \varnothing \text{ для всякого открытого } U \ni x\}.$$

(б) Пусть топология на X задается какой-то метрикой. Покажите, что $\bar{A}$ совпадает с множеством пределов всех сходящихся последовательностей $\{x_n\}$, для которых все $x_n \in A$.

Напомним, что если X и Y — топологические пространства, то топология на $X \times Y$ задается следующим образом. Подмножество $W \subset X \times Y$ называется открытым, если для всякой точки $w \in W$ существую такие открытые множества $U \subset X$ и $V \subset Y$, что $w \in U \times V \subset W$. Аналогичным образом определяется топология на произведении любого конечного числа пространств.

2. Проверьте, что при таком определении открытых множеств действительно получается топологической пространство.

3. Покажите, что топология на $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$, определенная как произведение обычных топологий на $\mathbb{R}$, совпадает с топологией, заданной евклидовой метрикой.

4. Покажите, что отображения $s\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $p\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданные формулами

$$s\colon (x, y) \mapsto x + y, \qquad p\colon (x, y) \mapsto xy,$$

являются непрерывными.

5. Пусть X — произвольное множество. *Диагональю* называется подмножество $\Delta_X \subset X \times X$, состоящее из всевозможных пар (x, x), где $x \in X$. Покажите, что топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ Δ_X является замкнутым подмножеством в $X \times X$.

6. Пусть X, Y и Z — топологические пространства. Рассмотрим отображение $\varphi\colon X \to Y \times Z$, заданное формулой

$$x \mapsto (f(x), g(x)),$$

где $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$ — некоторые отображения. Покажите, что отображение φ непрерывно тогда и только тогда, когда f и g непрерывны.

7. Пусть X — топологическое пространство и $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Покажите, что функции $f + g$ и fg также непрерывны.

8. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств.

а) Покажите, что если Y хаусдорфово, то график $\Gamma_f \subset X \times Y$ замкнут в $X \times Y$.

б) Покажите, что если не предполагать хаусдорфовости пространства Y, то это утверждение неверно.

9. Пусть X и Y — топологические пространства; отображение $f\colon X \to Y$ называется *открытым*, если для всякого открытого подмножества $U \subseteq X$ множество $f(U) \subseteq Y$ также открыто. Приведите пример открытого отображения, не являющегося непрерывным, а также непрерывного отображения, не являющегося открытым.