

Листок 14 (ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ)

Если вы пользуетесь правилом Лопиталья для раскрытия неопределенности вида $0/0$, то вы должны уметь его доказывать. Во всех задачах листка без этой версии правила Лопиталья можно обойтись.

1. Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — непрерывное отображение, дифференцируемое с ненулевой производной на $(a; b)$, причем $f(a) \neq f(b)$. Обязательно ли найдется точка $c \in [a; b]$, для которой касательная к кривой в точке $f(c)$ параллельна отрезку, соединяющему $f(a)$ и $f(b)$? (Иными словами: верна ли в \mathbb{R}^3 теорема о среднем?)

2. Запишите формулу Тейлора для функции $f(x) = \sin(\ln(1+x))$ в нуле, с остаточным членом вида $o(x^5)$.

3. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x}.$$

4. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$$

5. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}$$

(указание: возьмите логарифм).

6. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (\cos x)^{1/x^2}.$$

7. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

8. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2+x^2}}.$$

9. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x^3/(x^2+1))}}{e^{2x+1}}.$$

10. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}.$$

11. Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}.$$