Листок 13 (вокруг леммы Цорна)

Все задачи этого листка, кроме 1а и 1б — задачи повышенной трудности, и все они, кроме первой, имеют отношение к лемме Цорна.

1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, обладающая тем свойством, что

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}.$$

а) Предположим, что f непрерывна всюду на $\mathbb{R}$. Докажите, что f линейна.

б) Предположим, что f непрерывна хотя бы в одной точке $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что f линейна.

в) Предположим, что f ограничена хотя бы на одном отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Докажите, что f линейна.

г) Предположим, что f ограничена сверху хотя бы на одном отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Докажите, что f линейна.

2. Линейный порядок $\leqslant$ на множестве X называется *полным порядком*, если всякое непустое подмножество $Y \subset X$ содержит элемент, наименьший относительно $\leqslant$. Докажите с помощью леммы Цорна, что на всяком множестве существует полный порядок.

3. Пусть V — векторное пространство над полем k и $v \in V \setminus \{0\}$.

(а) Покажите, что существует векторное подпространство $H \subset V$, максимальное (по включению) в классе подпространств, не содержащих v.

(б) Покажите, что подпространство H из пункта (а) обладает следующим свойством: если $H_1 \subset V$ — векторное пространство, содержащее H_1, то H_1 совпадает с H или с V.

4. Во всякой ли коммутативной группе G существует подгруппа $H \subsetneq G$, обладающая следующим свойством: если $H_1 \subset G$ — подгруппа, содержащая H_1, то H_1 совпадает с H или с V?

5. а) Пусть дана последовательность конечных множеств $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, и пусть для всякого натурального $n > 1$ задано отображение $f_n\colon X_n \to X_{n-1}$. Докажите, что существует последовательность элементов $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, обладающая тем свойством, что $f_n(x_n) = x_{n-1}$ при всех $n > 1$.

б) Остается ли верным утверждение пункта (а), если не предполагать конечности множеств X_n?