Листок 12 (смесь)

Это последний листок второго модуля и всего первого семестра.

1. Положим
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
(эти функции называются гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом). Получите для гиперболических косинуса и синуса: а) аналог формул сложения и «основного тригонометрического тождества»; б) разложения в степенные ряды.

2. а) Выведите из формулы бинома Ньютона формулы, выражающие $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$ через $\cos x$ и $\sin x$. б) Докажите, что для всякого натурального $n \in \mathbb{N}$ существует многочлен P_n степени n, обладающий тем свойством, что $\cos(nx) = P_n(\cos x)$. в) Докажите, что многочлен P_n имеет n различных действительных корней на отрезке $[-1; 1]$.

3. Докажите, что функция
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
дифференцируема на всем $\mathbb{R}$, но не лежит в $C^1(\mathbb{R})$.

4. Пусть функции f и g обе n раз дифференцируемы. Покажите, что
$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} \cdot g'' + \ldots + \binom{n}{n-1} f' \cdot g^{(n-1)} + f \cdot g^{(n)}.$$

5. Пусть $f(x) = \sin(x^{16} + x^{18})$. а) Найдите $f^{(52)}(0)$; б) Найдите $f^{(2009)}(0)$.

6. Пусть функция $f \colon (a; b) \to \mathbb{R}$ принадлежит классу C^3, и пусть для точки $c \in (a; b)$ имеем $f'(c) = f''(c) = 0$, но $f'''(c) \neq 0$. Покажите, что в точке c у функции f нет локального экстремума.

7. Пусть $f \colon [a; b] \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная на $[a; b]$ и дифференцируемая на $(a; b)$. Предположим, что существует $\lim_{c \to a+0} f'(c) = k$. Докажите, что тогда
$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k$$
(«правая производная в точке a).

8. а) Пусть функция f дифференцируема на интервале, содержащем отрезок $[a; b]$, причем $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Докажите, что существует точка $c \in (a; b)$, для которой $f'(c) = 0$. б) Пусть функция f дифференцируема на интервале, содержащем отрезок $[a; b]$. Докажите, что на интервале $(a; b)$ функция f' принимает все значения, промежуточные между $f'(a)$ и $f'(b)$.