

Листок 11 (ПРОИЗВОДНАЯ)

Найдите следующие пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \log_2(1+x)/x$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / \operatorname{tg} x$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)/x^2$.

Найдите производные следующих функций:

4. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (как функции от x);
5. $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;
6. $y = \log_x 2$;
7. $y = \log_x \sin x$;
8. $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

Постройте графики следующих функций.

9.

$$y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 6}.$$

10.

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}.$$

Докажите следующие неравенства.

11. $\sin x < x$ при $x > 0$.
12. $\sin x > x - (x^3/6)$ при $x > 0$.
13. Пусть дифференцируемая функция $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает тем свойством, что $f'(\xi) = 0$ для всех ξ . Докажите, что f — константа.
14. Опишите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ (для всех $x, y \in \mathbb{R}$).
15. Приведите пример функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, не являющейся производной никакой дифференцируемой функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
16. а) Пусть f — многочлен степени n с действительными коэффициентами, имеющий n различных действительных корней. Покажите, что многочлен f' имеет $n - 1$ различных действительных корней. б) Пусть f имеет n действительных корней с учетом кратности. Верно ли, что f' обязательно имеет $n - 1$ действительных корней с учетом кратности?