

Листок 10 (НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРОЧЕЕ)

1. Пусть $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая и строго возрастающая функция, и пусть $f'(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (a; b)$. Покажите, что функция, обратная к f , не имеет производной в точке $f(\xi)$.
2. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Докажите, что она не является непрерывной в нуле (функция, не являющаяся непрерывной в какой-то точке, называется *разрывной* в этой точке).

3. Пусть непустое подмножество $X \subset \mathbb{R}$ обладает следующим свойством: если $a, b \in X$, $a < b$, то $[a; b] \subset X$. Докажите, что X — одноточечное подмножество или интервал.
4. а) Существует ли функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывная ровно в одной точке? б) Существует ли функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемая ровно в одной точке?
5. Существует ли непрерывная вещественнозначная функция на отрезке, имеющая на этом отрезке бесконечно много строгих локальных максимумов?
6. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность комплексных чисел и X — множество предельных точек последовательности $\{z_n\}$. Пусть теперь $\{w_n\}$ — такая последовательность, что $w_n \in X$ при всех n . Докажите, что если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$, то этот предел также лежит в множестве X .
7. Пусть функция $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ определена следующим образом. Числу $x \in (0; 1)$ с десятичной записью $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ (записи с «хвостом» девяток не допускаются) ставится в соответствие число, для которого $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ является записью в одиннадцатеричной системе. а) Покажите, что f не является непрерывной функцией на $(0; 1)$. б) Опишите все точки $\xi \in (0; 1)$, в которых функция f непрерывна.
8. Пусть функция $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ определена следующим образом: если x иррационально, то $f(x) = 0$, а если $x = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$ и дробь p/q несократима, то $f(x) = 1/q$. Докажите, что f непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках.