

Листок 1

1. а) Придумайте определение понятия «последовательность $\{x_n\}$ сходится к $+\infty$ » (обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$). Неформально это понятие означает, что члены последовательности становятся большими любого наперед заданного числа. б) Придумайте определение понятия «последовательность $\{x_n\}$ сходится к ∞ » (обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$). Неформально это понятие означает, что члены последовательности становятся *по абсолютной величине* большими любого наперед заданного числа. (Последовательности, стремящиеся к $+\infty$ или $\pm\infty$, сходящимися называть не принято.)
2. а) Покажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 0$. б) Покажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$ для всех n , то $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = \infty$.
3. Пусть последовательность $\{x_n\}$ обладает тем свойством, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = b$. Покажите, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если $a \neq b$, и сходится, если $a = b$.
4. а) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и $x_n \geq y_n$ при всех n . Докажите, что $a \geq b$ (указание: удобно доказывать от противного). б) Что будет, если условие « $x_n \geq y_n$ при всех n » заменить на « $x_n \geq y_n$ при всех $n > 1000\,000$ »? в) Пусть в пункте (а) выполнено более сильное условие: $x_n > y_n$ при всех n . Следует ли отсюда, что $a > b$?

В нижеследующих задачах постарайтесь вычислять пределы не напрямую по определению, а с использованием доказанных нами свойств предела.

5. Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1}.$$

6. Найдите предел последовательности $(n + 1)^{2008} / (n^{2008} + 1)$.
7. а) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $0 \leq q < 1$. (Указание. Сначала докажите, что предел существует.) б) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$. в) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \pm\infty$ при $|q| > 1$.
8. Найдите пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2/2^n)$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (100^n/n!)$.
9. Пусть $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ при всех n . Докажите, что последовательность x_n сходится, и найдите ее предел.