

Листок 0 (для тех, кто «уже все знает»)

Этот листок — для тех, кто считает, что знает основы анализа. Если в четверг 4 сентября вы представите в письменном виде правильные решения всех задач (кроме, может быть, одной), то вам разрешается пропустить несколько первых занятий по анализу (сколько именно, вам сообщит куратор курса).

1. В сходящейся последовательности действительных чисел все члены с четными номерами положительны, а все члены с нечетными номерами отрицательны. Чему равен предел этой последовательности?
2. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.
3. Существует ли предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$?
4. Зафиксируем число $a \geq 2$ и рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, в которой $x_1 = a$ и $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ при всех n . Выясните, при каких a она сходится, и выразите ее предел через a в тех случаях, когда он существует.
5. Пусть $x_1 = 1/2$ и $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ при всех n .
 - а) Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
 - б) Найдите такое α , что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/n^\alpha$ существует и отличен от нуля.
6. Некоторые из нижеперечисленных тождеств неверны.

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B); & f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); \\ f(A \cap B) &= f(A) \cap f(B); & f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B); \\ f(A \setminus B) &= f(A) \setminus f(B); & f^{-1}(A \setminus B) &= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

а) Укажите неверные тождества. б) Неверные тождества можно в приведенном списке сделать верными, заменив в них знак равенства на \subseteq или \supseteq . Проведите эти замены.

7. Постройте в явном виде взаимно однозначное соответствие между интервалами $[0; 1]$ и $[0; 1)$.

8. Какова мощность множества всевозможных конечных последовательностей натуральных чисел (длина последовательности произвольна)?