Зачётная письменная работа за 1-й и 2-й модули.

Задачи можно решать в любом порядке. Решение задач 2, 4, 5, а также каждого пункта задач 1, 3, 6 оценивается в 10 баллов. Для получения за эту работу максимальной оценки «10» заведомо достаточно набрать 70 баллов (из 100 возможных).

Задача 1◇1. Является ли циклической аддитивная группа

а) $\mathbb{Z}/(12) \times \mathbb{Z}/(15)$ **б)** $\mathbb{Z}/(10) \times \mathbb{Z}/(21)$

Если да, то каким элементом она порождается? Если нет — почему?

Задача 1◇2. Вычислите $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1+3i & 1 \\ 3+2i & 3-i & 0 & (2-2i)^2 & 5-2i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (3+2i)^2 & (i-3)^2 & 0 & 1+i & (2i-5)^2 \\ 1-2i & (2-i)^2 & 1 & (2-2i)^2 & 5-3i \end{pmatrix}$.

Задача 1◇3.

а) Найдите цикловой тип следующих перестановок из симметрической группы $\mathfrak{S}_{12}$:

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 6 & 10 & 9 & 3 & 12 & 11 & 2 & 5 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 12 & 9 & 3 & 4 & 8 & 11 & 6 & 10 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 10 & 12 & 3 & 9 & 11 & 2 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

б) Для каждой из перестановок σ, τ выясните, содержится ли она среди степеней ϱ^n, $n \in \mathbb{N}$, и если да, найдите наименьшую такую степень, а если нет — объясните почему.

Задача 1◇4. В четырёхмерном пространстве с базисом e_1, e_2, e_3, e_4 заданы векторы

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_1 + 2e_2 \\ \varepsilon_2 &= 3e_1 + 5e_2 \\ \varepsilon_3 &= e_1 + 2e_3 + e_4 \\ \varepsilon_4 &= e_2 - e_3 - e_4 \end{aligned}$$

Покажите, что они тоже составляют базис, разложите по этому базису исходные базисные векторы e_i, и найдите координаты вектора $xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4$ в новом базисе.

Задача 1◇5. Линейный оператор $V \xrightarrow{F} V$ удовлетворяет уравнению $F^3 - 3F + 1 = 0$. Покажите, что оператор $G = F^4 - 3F^2 - 2$ обратим, и выразите G^{-1} в виде многочлена от F.

Задача 1◇6. На трёхмерном координатном пространстве $W = \mathbb{F}_2^3$ над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$ действует линейный оператор g, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Покажите, что его степени g^n, $n \in \mathbb{N}$, образуют циклическую группу преобразований пространства W и найдите порядок этой группы.

б) Найдите все векторы, которые остаются на месте при действии g.

в) Сколько орбит имеет группа $\langle g \rangle$ на W и каковы длины этих орбит?