# Зачётная письменная работа за 1-й и 2-й модули.

Задачи можно решать в любом порядке. Решение задач 2, 4, 5, а также каждого пункта задач 1, 3, 6 оценивается в 10 баллов. Для получения за эту работу максимальной оценки «10» заведомо достаточно набрать 70 баллов (из 100 возможных).

**Задача 1◇1.** Является ли циклической аддитивная группа

**а)** $\mathbb{Z}/(12) \times \mathbb{Z}/(15)$ **б)** $\mathbb{Z}/(10) \times \mathbb{Z}/(21)$

Если да, то каким элементом она порождается? Если нет — почему?

**Задача 1◇2.** Вычислите $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1+3i & 1 \\ 3+2i & 3-i & 0 & (2-2i)^2 & 5-2i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (3+2i)^2 & (i-3)^2 & 0 & 1+i & (2i-5)^2 \\ 1-2i & (2-i)^2 & 1 & (2-2i)^2 & 5-3i \end{pmatrix}$.

**Задача 1◇3.**

**а)** Найдите цикловой тип следующих перестановок из симметрической группы $\mathfrak{S}_{12}$:

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 6 & 10 & 9 & 3 & 12 & 11 & 2 & 5 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 12 & 9 & 3 & 4 & 8 & 11 & 6 & 10 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 10 & 12 & 3 & 9 & 11 & 2 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

**б)** Для каждой из перестановок $\sigma$, $\tau$ выясните, содержится ли она среди степеней $\varrho^n$, $n \in \mathbb{N}$, и если да, найдите наименьшую такую степень, а если нет — объясните почему.

**Задача 1◇4.** В четырёхмерном пространстве с базисом $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ заданы векторы

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_1 + 2e_2 \\ \varepsilon_2 &= 3e_1 + 5e_2 \\ \varepsilon_3 &= e_1 + 2e_3 + e_4 \\ \varepsilon_4 &= e_2 - e_3 - e_4 \end{aligned}$$

Покажите, что они тоже составляют базис, разложите по этому базису исходные базисные векторы $e_i$, и найдите координаты вектора $xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4$ в новом базисе.

**Задача 1◇5.** Линейный оператор $V \xrightarrow{F} V$ удовлетворяет уравнению $F^3 - 3F + 1 = 0$. Покажите, что оператор $G = F^4 - 3F^2 - 2$ обратим, и выразите $G^{-1}$ в виде многочлена от $F$.

**Задача 1◇6.** На трёхмерном координатном пространстве $W = \mathbb{F}_2^3$ над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$ действует линейный оператор $g$, матрица которого в стандартном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**а)** Покажите, что его степени $g^n$, $n \in \mathbb{N}$, образуют циклическую группу преобразований пространства $W$ и найдите порядок этой группы.

**б)** Найдите все векторы, которые остаются на месте при действии $g$.

**в)** Сколько орбит имеет группа $\langle g \rangle$ на $W$ и каковы длины этих орбит?