ДЗ-4. До 4 дек! Пишите решения!

---

1. Найти с помощью элементарных преобразований обратные к

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\0&1&2&1\\0&0&1&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{bmatrix}.$$

2. Пусть $l_1, l_2 \in V^*$ – две ненулевые непропорциональные линейные функции и $\mathrm{Ann}\langle l_1, l_2\rangle := \{v \mid l_1(v) = l_2(v) = 0\}$. Докажите что $\dim \mathrm{Ann}\langle l_1, l_2\rangle = \dim V - 2$.

3.* Пусть $l_i \in V^*$, $i=1,\dots,k$. Пусть из $l_1(v)=\dots=l_{k-1}(v)=0$ следует $l_k(v)=0$. Покажите, что l_k выражается через $l_1,\dots,l_{k-1}$.

4а.* Докажите, что если $l_1,\dots,l_m$ - лин. незав. система лин. функций, то существуют $v_1,\dots v_m \in V$ такие, что $l_i(v_j)=\delta_{ij}$.

4б.* Пусть $l_1,\dots,l_m \in V^*$. Покажите, что

$l_1,\dots l_m$ - лин. независимы $\Leftrightarrow$ $\varphi: V \to K^m$, $\varphi(v)=(l_1(v),\dots,l_m(v))$ сюръективно.

(Указание: стоит решать 4а и 4б вместе).

5.* Пусть L подпространство в V^* и $\mathrm{Ann}\, L=\{v \mid l(v)=0, \forall l\in L\}$. Покажите, что $\dim L + \dim \mathrm{Ann}\, L = \dim V$.

6. Пусть A - квадратная матрица и $A^m=O$. Покажите, что $B=E+A$ - обратима.

7. Пусть A и B матрицы $n\times n$. Покажите, что

$(A+B)^2 = A^2 + B^2$ тогда и только тогда, когда $AB=-BA$.

8. Пусть A матр $n\times m$ и B матрица $m\times n$. Покажите, что суммы диагональных элементов у AB и BA одинаковы.