АЛГЕБРА – модуль 3.

Магия матриц: матрицы перехода.

Когда привыкаешь к матричному умножению, обнаруживаешь, что многие формулы удобно помнить в матричных обозначениях.

Например стандартное скалярное произведение двух векторов
$\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$

$$(\bar{a}|\bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = \bar{a} \cdot \bar{b}^{\mathsf{T}} \tag{1}$$

можно записать как произведение строки $\bar{a}$ и столбца (транспонированной строки) $\bar{b}^{\mathsf{T}}$, здесь и далее A^{T} обозначает транспонирование матрицы A.

Также формулу разложения вектора x с координатами $x_1, \ldots, x_n$ по базису $e_1, \ldots, e_n$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$$

можно записать как матричное произведение. Традиционно базис берут в виде строки, которую мы будем обозначать (e_*), а координаты – в виде столбца X или $[x_*]$. Будем считать, что круглые скобки указывают на строку, а квадратные – на столбец. Тогда можно записать

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i = (e_*)[x_*] \tag{2}$$

или $x = (e_*)X$.

Как мы знаем, координаты в данном базисе $e_1, \ldots, e_n$ являются линейными функциями. Положим $\varkappa_i(x) := x_i$, то есть $\varkappa_i$ есть "взятие i-й координаты". Тогда формулу

$$\varkappa_i(e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 \text{ если } i \neq j \\ 1 \text{ если } i = j, \end{cases} \tag{3}$$

можно записать как матричное произведение столбца $[\varkappa_*]$ на строку (e_*)

$$[\varkappa_*](e_*) = E, \tag{4}$$

где E обозначает единичную матрицу (размера $n \,\mathrm{x}\, n$).

Система линейных функций-координат $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$, образует базис сопряженного пространства V^* (пространства всех линейных функций на V), называемый *дуальным базисом* к $e_1, \ldots, e_n$.

Легко убедиться, что и формула (3), и формула (4) означают дуальность базисов $e_1, \dots, e_n$ и $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$.

Определение матрицы C перехода к новому базису $e'_1, \dots, e'_n$:
C это матрица, столбцы которой есть координаты в старом базисе векторов нового базиса, можно свернуть в матричную формулу

$$(e'_*) = (e_*)C\,. \tag{5}$$

Можно сказать, что формулой (5) и определяется матрица перехода C от базиса e_* к e'_*.

При этом для любого вектора x определены столбцы его старых координат X и новых X'. Мы знаем, что существует *матрица K перехода от старых координат к новым*, так что

$$X' = K\,X\,, \tag{6}$$

Формулу (6) можно записать по другому. Заметим, что в (6) слева записан столбец значений на векторе x линейных функций-координат $\varkappa'_1, \dots, \varkappa'_n$ для нового базиса $e'_1, \dots, e'_n$, справа его выражение через значения на x старых функций-координат $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$. Так как x произволен, то формула означает

$$[\varkappa'_*] = K\,[\varkappa_*]\,. \tag{7}$$

Это – та же формула перехода от старых координат к новым.

Собственно формулу (7) можно использовать, чтобы доказать существование матрицы K. Она показывает, что строки K состоят из координат линейных функций $\varkappa'_i$ в базисе $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$. Можно взять это за определение K – матрицы перехода от старой системы координат к новой.

Заметим, что (4), вместе с (5) и (7), дает

$$E = [\varkappa'_*](e'_*) = \,K\,[\varkappa_*]\,(e_*)C \,=\, KEC \,= K\,C\,. \tag{8}$$

Мы видим, что $KC = E$, то есть матрица перехода от одного базиса к другому и матрица перехода от одной системы координат к другой взаимно обратны. Обычно это записывают в виде

$$K = C^{-1}\,.$$

Иногда матрицу перехода K отдельно вообще не вводят (или не вводят C).

Из того же вычисления (8) следует: если мы возьмем взаимно обратные C и K, построим новый базис в V согласно (5) и новый базис в V^* согласно (7), то построенные базисы будут дуальными. Это в частности показывает, что *любой базис в V^* дуален некоторому базису в V*.

Заметим еще, что применив к (7) транспонирование, получим

$$(\varkappa'_*) = (\varkappa_*)\,K^{\mathsf{T}}\,. \tag{9}$$

Сравнивая с (5), заключаем, что $K^{\mathsf{T}} = (C^{-1})^{\mathsf{T}}$ совпадает с матрицей перехода от базиса $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$ к базису $\varkappa'_1, \dots, \varkappa'_n$ в пространстве V^* (в данный момент нам это не так уж важно).