

АЛГЕБРА – модуль 3.

Магия матриц: матрицы перехода.

Когда привыкаешь к матричному умножению, обнаруживаешь, что многие формулы удобно помнить в матричных обозначениях.

Например стандартное скалярное произведение двух векторов $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$

$$(\bar{a}|\bar{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \bar{a} \cdot \bar{b}^T \quad (1)$$

можно записать как произведение строки \bar{a} и столбца (транспонированной строки) \bar{b}^T , здесь и далее A^T обозначает транспонирование матрицы A .

Также формулу разложения вектора x с координатами x_1, \dots, x_n по базису e_1, \dots, e_n

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

можно записать как матричное произведение. Традиционно базис берут в виде строки, которую мы будем обозначать (e_*) , а координаты – в виде столбца X или $[x_*]$. Будем считать, что круглые скобки указывают на строку, а квадратные – на столбец. Тогда можно записать

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = (e_*)[x_*] \quad (2)$$

или $x = (e_*)X$.

Как мы знаем, координаты в данном базисе e_1, \dots, e_n являются линейными функциями. Положим $\varkappa_i(x) := x_i$, то есть \varkappa_i есть "взятие i -й координаты". Тогда формулу

$$\varkappa_i(e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{если } i \neq j \\ 1 & \text{если } i = j, \end{cases} \quad (3)$$

можно записать как матричное произведение столбца $[\varkappa_*]$ на строку (e_*)

$$[\varkappa_*](e_*) = E, \quad (4)$$

где E обозначает единичную матрицу (размера $n \times n$).

Система линейных функций-координат $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$, образует базис сопряженного пространства V^* (пространства всех линейных функций на V), называемый *дуальным базисом* к e_1, \dots, e_n .

Легко убедиться, что и формула (3), и формула (4) означают дуальность базисов e_1, \dots, e_n и $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$.

Определение матрицы C перехода к новому базису e'_1, \dots, e'_n :
 C это матрица, столбцы которой есть координаты в старом базисе векторов нового базиса, можно свернуть в матричную формулу

$$(e'_*) = (e_*)C. \quad (5)$$

Можно сказать, что формулой (5) и определяется матрица перехода C от базиса e_* к e'_* .

При этом для любого вектора x определены столбцы его старых координат X и новых X' . Мы знаем, что существует матрица K перехода от старых координат к новым, так что

$$X' = K X, \quad (6)$$

Формулу (6) можно записать по другому. Заметим, что в (6) слева записан столбец значений на векторе x линейных функций-координат $\varkappa'_1, \dots, \varkappa'_n$ для нового базиса e'_1, \dots, e'_n , справа его выражение через значения на x старых функций-координат $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$. Так как x произволен, то формула означает

$$[\varkappa'_*] = K [\varkappa_*]. \quad (7)$$

Это – та же формула перехода от старых координат к новым.

Собственно формулу (7) можно использовать, чтобы доказать существование матрицы K . Она показывает, что строки K состоят из координат линейных функций \varkappa'_i в базисе $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$. Можно взять это за определение K – матрицы перехода от старой системы координат к новой.

Заметим, что (4), вместе с (5) и (7), дает

$$E = [\varkappa'_*](e'_*) = K [\varkappa_*](e_*)C = KEC = KC. \quad (8)$$

Мы видим, что $KC = E$, то есть матрица перехода от одного базиса к другому и матрица перехода от одной системы координат к другой взаимно обратны. Обычно это записывают в виде

$$K = C^{-1}.$$

Иногда матрицу перехода K отдельно вообще не вводят (или не вводят C).

Из того же вычисления (8) следует: если мы возьмем взаимно обратные C и K , построим новый базис в V согласно (5) и новый базис в V^* согласно (7), то построенные базисы будут дуальными. Это в частности показывает, что любой базис в V^* дуален некоторому базису в V .

Заметим еще, что применив к (7) транспонирование, получим

$$(\varkappa'_*) = (\varkappa_*) K^T. \quad (9)$$

Сравнивая с (5), заключаем, что $K^T = (C^{-1})^T$ совпадает с матрицей перехода от базиса $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$ к базису $\varkappa'_1, \dots, \varkappa'_n$ в пространстве V^* (в данный момент нам это не так уж важно).