Лекция 11

Несколько замечаний

1) Замечание о грассмановом умножении

Мы специально отмечали грассмановы неизвестные и их формы «шапочкой». Часто делают по-другому — пишут обычные обозначения для неизвестных, но по особому «шапочкой» обозначают умножение:

$$x \wedge x = 0 \quad , \quad x_1 \wedge x_2 = - x_2 \wedge x_1$$

Это часто употребляемое обозначение (правда неудобно писать длинные мономы).

2) Вычисление одного определителя.

Пусть $a_1, \dots, a_k$ различные числа (элементы поля).

Теорема (определитель Ван-дер-Монда). ($k \geq 2$)

$$\Delta := \det \begin{pmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_k \\ a_1^2, & a_2^2, & \dots, & a_k^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^{k-1}, & a_2^{k-1}, & \dots, & a_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{j>i} (a_j - a_i)$$

Сл. Такая же формула и для транспонированной матрицы.

Док. Пусть $k = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$ – верно.

В общем случае рассмотрим элементарные преобразования типа 1:

$\underline{k} - a_1 \cdot \underline{k-1}$; $\underline{k-1} - a_1 \cdot \underline{k-2}$, и так далее.

Запишу это для $k = 3$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \underset{0}{\underset{\parallel}{a_1^2 - a_1^2}}, & a_2^2 - a_1 a_2, & a_3^2 - a_1 a_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1), & a_3(a_3 - a_1) \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\text{разложение по 1-му столбцу}}{=} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & ; & a_3 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & ; & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = (a_3 - a_1)(a_2 - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично для $k = 4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ 0 & a_2^3 - a_2^2 a_1 & a_3^3 - a_3^2 \cdot a_1 & a_4^3 - a_4^2 \cdot a_1 \end{vmatrix} = \ldots >$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & a_4-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & a_4(a_4-a_1) \\ 0 & a_2^2(a_2-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & a_4^2(a_4-a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{j>1}(a_j - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом мы получаем

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ \vdots & & & \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{j>1}(a_j - a_1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & & a_k \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{k-2} & & a_k^{k-2} \end{pmatrix}$$

что, по индукции дает требуемую формулу! ■

3) Замечание о квадратных матрицах

<u>Теорема</u> Строки квадр. матрицы лин. независимы $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ опред. матрицы $\neq 0$.

<u>Сл.</u> То же и для столбцов.

<u>Док</u> Пусть A – матрица $n \times n$.

Мы знаем (строки A лин. незав) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}\, A = n$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A имеет обратную.

Теперь (A имеет обратную) $\Rightarrow$ $(\exists B : A \cdot B = E)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(\det A)(\det B) = 1$ $\Rightarrow$ $\underline{\det A \neq 0}$

С другой стороны: $\det A \neq 0$ $\Rightarrow$ $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot (A^{доп})^T$ –

– есть формула для A^{-1}

$\Rightarrow$ A имеет обратную •

(Можно доказывать теорему и через приведение к ступ. виду, но проще использовать доказанные теоремы).

4) Формула Крамера для решения <u>квадр. системы</u> лин. уравнений.

<u>Теорема</u> Пусть есть n уравнений и n неизвестных, система лин. уравнений вида $[A \mid B]$, где A – квадратная и $\det A \neq 0$. Тогда $\forall$ правой части B система имеет единственное решение, где i-й столбец из A заменен на B

$$x_i = (\det A)^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Пример</u>: Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Тогда $\det A = 1$ и решение будет

$$x_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

<u>Док.</u> В матричной форме нашу систему можно записать как

$$AX = B, \quad \text{где } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ · столбец неизвестных.}$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot (A^{\text{алг}})^T$ определена и

$$X = A^{-1} B \text{ есть решение (можно подставить!)}$$

Посчитаем произведение

$$X = (\det A)^{-1} \begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} \cdots & A_{ji} & \cdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \vdots \\ b_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

или $$x_i = (\det A)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j A_{ji}$$ — это есть разложение по i-му столбцу

определителя матрицы $\left(A \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix} A \right)$ — в A i-й столбец заменен на B! ∎

5) Аннулирующий многочлен

Пусть есть матрица A и есть многочлен $f(x)$, такой что $f(A)=0$ — f аннулирует A.

Это можно использовать! Например.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, то

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot E$$

То есть $A^2 + A + 4E = 0$, $f(x) = x^2 + x + 4$ аннулирует A.

Вопрос Чему равно $A^3 - E$?

Заметим, что $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(x^2+x+4-3)$

значит $A^3 - E = (A - E)(0 - 3E) = 3(E - A) = 3\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Вопрос Чему равно $A^7 + 3A^5 - 4A^3$?

Реш. Поделим $x^7 + 3x^5 - 4x^3$ на $x^2 + x + 4$

Получаем $x^7 + 3x^5 - 4x^3 = (x^2+x+4)(x^5 - x^4 - 4x^2) + 16x$

Отв $A^7 + 3A^5 - 4A^3 = 16A$.

Вычисления с многочленами помогают считать с матрицами.

6) Пределы и ряды ~~с~~ матрицами.

Можно сказать, что последовательность матрица A_K сходится к B если для каждого места

$$(A_K)_{ij} \longrightarrow B_{ij}.$$

С другой стороны мы можем определить "величину" матриц A ($n \times n$ – квадратной матрицы), полагая

$$\lfloor A \rfloor := n \cdot \max_{(i,j)} |a_{ij}|. \quad \text{(элементы из } \mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C})$$

Легко видеть, что 1) $\lfloor A+B \rfloor \leq \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor$ – нер. треугольника

2) $\lfloor A \rfloor = 0 \Leftrightarrow A = 0$

и 3) $\lfloor AB \rfloor \leq \lfloor A \rfloor \cdot \lfloor B \rfloor$!

Последнее стоит рассмотреть детальнее

$$\left| (AB)_{ij} \right| = \left| \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \right| \leq \sum_{l=1}^{n} |a_{il}| \cdot |b_{lj}| \leq n \cdot \frac{\lfloor A \rfloor}{n} \cdot \frac{\lfloor B \rfloor}{n}$$

т.к. $|a_{il}| \leq \frac{\lfloor A \rfloor}{n}$, $|b_{lj}| \leq \frac{\lfloor B \rfloor}{n}$

$$\Rightarrow \quad n \cdot \max |(AB)_{ij}| \leq n \cdot \left(n \cdot \frac{\lfloor A \rfloor}{n} \cdot \frac{\lfloor B \rfloor}{n} \right) = \lfloor A \rfloor \cdot \lfloor B \rfloor$$

Теорема Если $\lfloor A_k - B \rfloor \longrightarrow 0$, то элементы $a_{ij}^{(k)}$ матриц A_k сходятся $a_{ij}^{(k)} \longrightarrow b_{ij}$.

Док.: Это "в сущности очевидно".

Докажите следующие следствия! (*)

След. 1

Если $|A| < 1$, то ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i \text{ - сходится. } = B$$

След 2. Для любой A, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k =: \exp(A) \text{ - сходится}$$

След 3 Если степенной ряд

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i$$ имеет радиус сходимости R

то при $|A| < R$, ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i A^i \text{ - сходится. } =: S(A).$$

Задача* Док: если $[A, B] = 0$, то

$$(\exp A)(\exp B) = \exp(A+B).$$