Лекция 10

Окончание текста лекции 9.

Опр: Однородный многочлен степени 1 от $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ часто называют (грассмановой) линейной формой.

Предложение: для грассмановых линейных форм верны те же тождества, что и для грассмановых переменных

$$\hat{a} \cdot \hat{a} = 0 \quad , \quad \hat{a} \cdot \hat{b} = -\hat{b} \cdot \hat{a} .$$

Док: просто проверить записав $\hat{a} = a_1 \hat{x}_1 + \dots + a_n \hat{x}_n$, $\hat{b} = b_1 \hat{x}_1 + \dots + b_n \hat{x}_n$ и раскрыв скобки. ■

Следствие ①. Если $\hat{s}_1 \dots \hat{s}_n$ грассмановы линейные формы, A - матрица $n \times n$ и

$$\hat{r}_i = \sum_j a_{ij} \hat{s}_j \quad , \quad \text{то}$$

$$\hat{r}_1 \dots \hat{r}_n = (\det A) \cdot \hat{s}_1 \dots \hat{s}_n ,$$

Следствие ② Пусть для матрицы B

$$\hat{s}_j = \sum_k b_{jk} \hat{x}_k . \quad \text{Тогда}$$

1) $\hat{s}_1 \dots \hat{s}_n = (\det B) \, \hat{x}_1 \dots \hat{x}_n$

2) $\hat{r}_i = \sum_k \sum_j a_{ij} \, b_{jk} \, \hat{x}_k = \sum_k (AB)_{ik} \, \hat{x}_k$

3) $\hat{r}_1 \dots \hat{r}_n = \det(AB) \, \hat{x}_1 \dots \hat{x}_n$

$\qquad \shortparallel$

$\qquad (\det A)(\det B) \, \hat{x}_1 \dots \hat{x}_n$, откуда

4) $\det(AB) = (\det A)(\det A)$.

Таким образом получается теорема

<u>Теорема</u> $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$.

<u>Доказательство</u> Сл. 1 доказывается точно так же, как основная формула для определителя через произв. грассм. линейных форм — Предл. на стр. 9-6.

В Сл. 2 утверждения 1), 2), 3), 4) — последовательно проверяются ∎

Сл. 3. Если A — обратима, то $\det A \neq 0$.

<u>Док.</u> по теореме: $\det E = (\det A)\cdot(\det A^{-1})$ и

$\det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$, $\underline{\det A^{-1} = (\det A)^{-1}}$ ∎

Собственно <u>лекция 10</u>

Сформулируем простые свойства определителей.

Напомню, если A — матрица $n\times n$, то рассмотрим грассмановы линейные формы, определенные строками A:

$$\hat{a}_i := \sum_j a_{ij}\hat{x}_j .$$

Мы знаем, что $\hat{a}_1\cdots\hat{a}_n = (\det A)\,\hat{x}_1\cdots\hat{x}_n$ (*)

<u>Свойства</u> 1) Если в A есть нулевая строка, то $\det A = 0$

2) Если в A есть равные строки, то $\det A = 0$.

3) При элементарных преобразованиях строк матрицы

— преобразования типа I: определитель <u>не меняется</u>

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_i' &= \hat{a}_i + \lambda\cdot\hat{a}_k \\ \hat{a}_m' &= \hat{a}_m \quad \text{при} \quad m \neq i\end{aligned}\right\} \Rightarrow \det A' = \det A$$

— преобразования типа II:

при перестановке строк определитель <u>меняет знак</u>

$$\det A' = -\det A.$$

— преобразования типа III:

при умножении строки на число:

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}_i' &= \alpha\,\hat{a}_i \\ \hat{a}_m' &= \hat{a}_m \quad \text{если} \quad m \neq i\end{aligned}\right\} \Rightarrow \det A' = \alpha\cdot\det A$$

определитель умножается на это число.

<u>Пример</u> Вычислить определитель:

прибавляем строки к 1-й.

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 13\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 13\cdot 6^6$$

<u>Задача:</u> пусть порядка n
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Отв $=$ <u>$n+1$</u>

Запишем это как свойство:

4) Определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов

По формуле (✳) $\hat{a}_i = d_i \cdot \hat{v}_i \Rightarrow \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n = (d_1 \dots d_n)\, \hat{x}_1 \dots \hat{x}_n$.

5) Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & - & \vert \\ 0 & a_{22} & - & - & - & \vert \\ 0 & 0 & a_{33} & & & \vert \\ - & - & - & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Док. Посмотрим с конца

$$\hat{a}_n = a_{nn} \hat{x}_n, \quad \hat{a}_{n-1} = a_{n-1,n-1} \hat{x}_{n-1} + a_{n-1,n} \hat{x}_n$$

Тогда $\hat{a}_{n-1} \cdot \hat{a}_n = \left(a_{n-1,n-1} \hat{x}_{n-1} + a_{n-1,n} \cdot \hat{x}_n \right) a_{nn} \cdot \hat{x}_n =$

$$= a_{n-1,n-1} \cdot a_{n,n} \hat{x}_{n-1} \hat{x}_n$$

Ясно, что при умножении на $\hat{a}_{n-2} = \underbrace{a_{n-2,n-2} \hat{x}_{n-2}} + (\dots)\hat{x}_{n-1} + (\dots)\hat{x}_n$ "будет использован" только первый член

$$\hat{a}_{n-2} \cdot \hat{a}_{n-1} \cdot \hat{a}_n = a_{n-2,n-2} \cdot a_{n-1,n-1} \cdot a_{n,n} \hat{x}_{n-2} \hat{x}_{n-1} \hat{x}_n$$

и так далее.

<u>Теорема</u> Строки A лин. зависимы $\Leftrightarrow \det A = 0$

Строки A лин. независимы $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

<u>Док:</u> Будем приводить <u>квадратную</u> матрицу A к ступенчатому виду преобразованиями типа I, II, III; при этом определитель может только умножиться на $+1, -1$ или <u>ненулевое</u> число, значит если он будет <u>нуль</u> у ступенчатой матрицы $\tilde{A} \Rightarrow$ он был <u>нуль</u>. Если он $\neq 0$ для $\tilde{A}$: $\det \tilde{A} \neq 0$, то $\det A \neq 0$.

Так как $\tilde{A}$ – ступенчатая матрица $n \times n$, то

(1) <u>либо</u> номера главных элементов возрастают ровно на 1.

$$\begin{matrix} * & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & * & - & - \\ 0 & 0 & * & - & - \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \quad \rightarrow \text{в } i\text{-й строке гл. элемент на } i\text{-м месте}$$

т.е. $\tilde{a}_{i,i} \neq 0$.

(2) <u>либо</u> в какой-то строке k: $\tilde{a}_{kk} = 0$ и главный элемент имеет номер $> k$.

тогда в последней строке будут <u>все нули</u>

В случае (1) $\det \tilde{A} = \prod \tilde{a}_{i,i} \neq 0 \Rightarrow \det A = 0$

в случае (2) есть нулевая строка

$$\det \tilde{A} = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

При этом в случае (1) $\operatorname{rk} A = n \Rightarrow$ строки лин. независимы.

В случае (2) $\operatorname{rk} A < n \Rightarrow$ строки лин. зависимы.

Теор. доказана.

Эту теорему часто называют: критерий линейной зависимости (через определитель).

Разложение определителя по строке:

Предварительные соображения:

Предположим, что первая строка содержит только один не нулевой элемент a_{1k}, то есть

$\hat{a}_1 = a_{1k} \cdot \hat{x}_k$. Тогда слагаемое с $\hat{x}_k$ "можно вычеркнуть" из остальных трассмановых форм — произведение не изменится!

$$\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 = a_{1k} \cdot \hat{x}_k \cdot (a_{21} \hat{x}_1 + \dots + a_{2k} \hat{x}_k + \dots + a_{2n} \cdot \hat{x}_n) =$$

$$= a_{1k} \hat{x}_k \cdot (a_{21} \hat{x}_1 + \dots + \cancel{a_{2k} \hat{x}_k} + \dots + a_{2n} \hat{x}_n)$$

и так далее, отсюда такое определение:

Минором M_{ik} матрицы A называется определитель матрицы $(n-1)\times(n-1)$, полученной из A вычеркиванием i-й строки и k-го столбца

И в нашем случае когда ~~только a_{1k}~~ $a_{1j} = 0$ при $j \neq k$, получаем

$$\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n = a_{1k} \cdot \hat{x}_k \cdot \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n = a_{1k} \cdot \hat{x}_k \cdot M_{1k} \underbrace{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n}_{\text{без } \hat{x}_k} =$$

$$= a_{1k} \cdot M_{1k} (-1)^{k-1} \hat{x}_1 \dots \hat{x}_k \dots \hat{x}_n ,$$

Отсюда мы получаем: или $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$ (Традиционно пишут +.)

Предложение

$$\det A = \sum_k a_{1k} \cdot M_{1k} (-1)^{k+1} \quad \langle \text{разложение по } 1^{\text{й}} \text{ строке} \rangle.$$

Док: Представим

$$\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n = \sum_k a_{1k} \cdot \hat{x}_k \, \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n$$

и применим предыдущее рассуждение ∎

Можно рассмотреть: <u>разложение по i-й строке</u>

<u>Теорема</u> Для некоторого i можно записать

$$\det A = \sum_k a_{ik} \cdot M_{ik} (-1)^{k+i}$$

<u>Док.</u> Достаточно переставить

$$\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n = (-1)^{i-1} \hat{a}_i \, \hat{a}_1 \cdots (\text{без } \hat{a}_i) \cdots \hat{a}_n \quad \text{и}$$

применить предыдущее рассуждение.

<u>Пример.</u> Хотим вычислить
– разложим по 3й строке

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} (-1)^5 + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^6 =$$

$$= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & -12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -12 \end{vmatrix} =$$

ясно что в 1й стр члены с $\hat{x}_2$ и $\hat{x}_3$ не понадобятся!

$$= (-2)(-84+3) + (24+9) = 162 + 33 = 195.$$

$$(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 7\hat{x}_3) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} \cdot \hat{x}_2 \hat{x}_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} \cdot \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2 \hat{x}_3 .$$

<u>Опред:</u> $(-1)^{i+k} M_{ik} =: A_{ik}$ называют алгебраическим дополнением элемента a_{ik}.

<u>Сл.(1)</u> Пусть дана матр A и A_{ik} – её алг. дополнения рассм

$$\sum_k z_k \cdot A_{ik} = \det \begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n} \\ z_1 \cdots & z_n \\ a_{n1} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ i\text{ стр} \\ \\ \end{matrix}$$

{определитель матрицы где $z_1 \cdots z_n$ заменили i-ю строку матр A}

<u>Сл.(2)</u>

$$(\#)\quad \sum a_{jk} A_{ik} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \det A & i = j \end{cases}$$

– получили определитель матрицы с одинаковыми строками

– теорема о разложении в первоначальной форме.

<u>следует из Сл.(1)</u>

Заметим что тут <u>почти</u> произведение матриц – надо элементы A_{ik} поместить в k-ю стр и i-столбец

$$(\tilde{A})_{k,i} := A_{ik}$$ (иногда называют присоединенная матрица)

Это – симметрия относительно главной диагонали

тогда (#) означает

$$A \cdot \tilde{A} = (\det A) \cdot E.$$

<u>Опред.</u> Транспонированной матрицей называется "симм относительно главной диагонали: дана $B = (b_{p,q})$

$$(B^T)_{i,j} := b_{j,i}$$ то B^T - трансп. к B.

<u>Пример</u>: Имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Дополнений
матрица из
$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 10}}{(\det A)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Важная теорема:

<u>Теорема</u>: Для любой квадратной матрицы A

$\det A = \det A^T$. Пусть $B = A^T$

<u>Док.</u> Вспомним формулу определителя

$$\det A = \sum_{\substack{\text{всевозм} \\ \text{перестановки} \\ (i_1 \dots i_n) \text{ набора } (1,\dots,n)}} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}\, \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} \overset{\text{переставляя множители}}{=}$$

$$= \sum a_{j_1 1} \cdots a_{j_n n}\, \varepsilon\begin{pmatrix} j_1 \dots & j_n \\ 1 \dots & n \end{pmatrix} =$$

так как $a_{ji} = b_{ij}$

$$= \sum b_{1j_1} \cdots b_{nj_n} \underset{\varepsilon\begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ j_1, \dots, j_n \end{pmatrix}}{?}$$

Заметим что знак

$$\varepsilon\begin{pmatrix} 1 \dots n \\ i_1 \dots i_n \end{pmatrix} = \underset{\substack{\shortparallel \\ \varepsilon\begin{pmatrix} 1 \dots n \\ j_1 \dots j_n \end{pmatrix}}}{\varepsilon\begin{pmatrix} j_1 \dots j_n \\ 1 \dots n \end{pmatrix}}$$

(по правилу ниточек!)

$= \det B$ ●

<u>Следствие</u> Те же свойства верны "по столбцам", что и "по строкам" – можно делать элем. преобр столбцов, разлагать по столбцу и т. п.