Лекция. 9

Операторы и матрицы.

Мы знаем, что когда отображения складываются — их матрицы складываются, когда перемножаются — их матрицы перемножаются, когда отображение умножается на число — его матрица умножается на число.

Мы можем использовать все эти операции для линейных операторов и их матриц (квадратных) и вычислять или упрощать алгебраические выражения. Например

$$(A+E)^2 = (A+E)(A+E) = A^2 + A\cdot E + E\cdot A + E^2 = A^2 + 2A + E$$

$$(A+E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E.$$

Или $(A-3E)(A-2E) = A^2 - 5A + 6E.$

Если есть многочлен $f(t) = a_0 + a_1\cdot t + \dots + a_n\cdot t^n$, то определим результат подстановки $t = \varphi$ в $f(t)$ как

$$f(\varphi) := a_0\cdot \mathbb{1} + a_1\cdot\varphi + \dots + a_n\cdot\varphi^n$$

при этом $f(\varphi) : V \to V$ линейный оператор,

$$v \longmapsto a_0 v + a_1\,\varphi(v) + \dots + a_n\,\varphi^n(v)$$

Ясно что равные выражения от t дают равные выражения от φ (или от A). Однако это не так, если мы подставляем в два неизвестных! $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ для многочленов от x, y

$$(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2 \quad \text{для матриц.}$$

Например если $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

то $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Конечно $(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^2 + B^2 = 0$

$$\| \quad AB - BA + A^2 + B^2$$

Опр: Выражение $AB - BA =: [A, B]$ наз. коммутатором A и B.

$$[A, B] = 0 \iff A \text{ и } B \text{ коммутируют} \iff AB = BA.$$

Предл. A^n и A^m коммутируют; для любых двух многочленов $f(t)$ и $g(t)$, матрицы $f(A)$ и $g(A)$ коммутируют.

Док. самим.

Прошлый раз мы не завершили доказательство теоремы.

Теорема Пусть $f(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – различны, и $h : V \to V$ лин. оператор, для которого

$$f(h) = 0.$$

Тогда $V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} U_3$ (прямая сумма) где $U_i := \mathrm{Ker}(h - \lambda_i \mathbb{1})$.

Определение: вектор $v \in V$ называется собственным для h с собственным значением λ если

$$h(v) = \lambda \cdot v.$$

$\boxed{g=3}$

Заметим, что подпространства U_i состоят из собственных векторов с собств. значением λ_i

$$x \in U_i \iff (h - \lambda_i \mathbb{1}) x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$h(x) - \lambda_i x = 0 \iff h(x) = \lambda_i \cdot x.$$

Мы уже доказали, что сумма прямая. Почему она всё V?

Мы можем использовать следующее равенство многочленов

<u>Лемма</u> Пусть $g_1(t) = \dfrac{(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}$; $g_2(t) = \dfrac{(t-\lambda_1)(t-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}$;

$g_3(t) = \dfrac{(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}$. Тогда а) $g_i(\lambda_i) = 1$,

$g_i(\lambda_j) = 0$ при $j \neq i$.

б) $g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) - 1 = 0$

<u>Док:</u> а) — проверяется непосредственно (по построению!)

б) левая часть формулы — многочлен (от t) ст. ≤ 2, равный 0 при $t = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, значит нулевой.

<u>Окончание</u> док. теоремы: По лемме:

$$\mathbb{1} = g_1(h) + g_2(h) + g_3(h)$$

значит $\forall x \in V$: $x = g_1(h)(x) + g_2(h)(x) + g_3(h)(x)$.

При этом $(t - \lambda_i) g_i(t) = f(t) \cdot \dfrac{1}{(\lambda_i - \lambda_\cdot)(\lambda_i - \lambda_\cdot)}$ (делится на $f(t)$)

значит $(h - \lambda_i \mathbb{1}) g_i(h) = 0$ и $g_i(h)(x) \in U_i$. Тем самым есть разложение x по подпространствам.

Новая тема: определители и грассмановы многочлены. =4=

Начну со второго.

Напомним — многочлен есть сумма одночленов. Определим сначала грассмановы "переменные" и грассм. одночлены.

Переменные это просто буквы: x, x_1, x_2, y, z, однако чтобы было видно, что они грассмановы я буду писать шапочку

$\hat{x}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k, \hat{y}, \hat{z}$ и т.п.

Определение Квадрат любой грассм. переменной равен 0:

$$\hat{x}\cdot\hat{x}=0$$

Для любых двух грассм. переменных верно:

$$\hat{x}\cdot\hat{y}=-\hat{y}\cdot\hat{x}, \quad \hat{x}_1\cdot\hat{x}_2=-\hat{x}_2\cdot\hat{x}_1.$$

Предложение: Пусть σ — перестановка на множестве $\{1,2,\dots,k\}$.

Тогда $\hat{x}_{\sigma(1)}\cdot\hat{x}_{\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\hat{x}_{\sigma(k)}=\varepsilon(\sigma)\cdot\hat{x}_1\cdot\ldots\cdot\hat{x}_k$

где $\varepsilon(\sigma)=\begin{cases}+1 & \sigma\text{ - четная}\\ -1 & \sigma\text{ - нечетная}\end{cases}$ — знак перестановки σ.

Пример: 1) Пусть σ это цикл $1\to2\to3$.

$$\hat{x}_2\cdot\hat{x}_3\cdot\hat{x}_1=-\hat{x}_2\cdot\hat{x}_1\cdot\hat{x}_3=+\hat{x}_1\cdot\hat{x}_2\cdot\hat{x}_3$$ и $\varepsilon(\sigma)=+1$ — такая перестановка, четная.

$\boxed{\text{Замечание } \hat{x}_1\cdot\hat{x}_3\cdot\hat{x}_1=0}$

2) Пусть $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$, тогда

$$\hat{x}_4\cdot\hat{x}_3\cdot\hat{x}_2\cdot\hat{x}_1=-\hat{x}_1\cdot\hat{x}_4\cdot\hat{x}_3\cdot\hat{x}_2=-\hat{x}_1\cdot\hat{x}_2\cdot\hat{x}_4\cdot\hat{x}_3=+\hat{x}_1\cdot\hat{x}_2\cdot\hat{x}_3\cdot\hat{x}_4$$

и $\varepsilon(\sigma)=+1$ - снова четная.

3) Пусть $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$, $\varepsilon(\sigma)=(-1)^3=-1$ и

$$\hat{x}_3\cdot\hat{x}_1\cdot\hat{x}_4\cdot\hat{x}_2=-\hat{x}_1\cdot\hat{x}_2\cdot\hat{x}_3\cdot\hat{x}_4$$

Док: Индукция по числу инверсий.

Заметим, что формула верна, когда 0 инверсий, то есть $\sigma = id$.

Пусть $\sigma(1), \dots, \sigma(k)$ имеет n инверсий, и для перестановок с меньшим числом инверсий формула доказана.

Так как $n > 0$, то $\exists\ i$, что $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ (инверсия в паре соседних)

Рассмотрим перестановку σ', которая отображает

$$1\ 2 \dots i-1, i, i+1, \dots k$$

в $$\sigma(1), \sigma(2), \dots \sigma(i-1), \sigma(i+1), \sigma(i), \dots \sigma(k)$$

мы поменяли $\sigma(i+1)$ и $\sigma(i)$ местами.

Ясно что число инверсий для σ' равно $n-1$. По предположению индукции

$$\hat{x}_{\sigma(1)} \hat{x}_{\sigma(2)} \dots \hat{x}_{\sigma(i-1)} \underbrace{\hat{x}_{\sigma(i+1)} \hat{x}_{\sigma(i)}}_{\text{переставим}} \dots \hat{x}_{\sigma(k)} = (-1)^{n-1} \hat{x}_1 \dots \hat{x}_k$$

$$\parallel$$

$$- \hat{x}_{\sigma(1)} \hat{x}_{\sigma(2)} \dots \hat{x}_{\sigma(i)} \hat{x}_{\sigma(i+1)} \dots \hat{x}_{\sigma(k)} \dots$$

Что и дает требуемое для σ.

Шаг индукции сделан. $\Rightarrow$ Утверждение доказано.

Опр: 1) Грассм. одночлен: число · произв. грассм. переменных

$2\hat{x}_1\hat{x}_2$; $-5\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{y}\hat{z}$, 7, и т.п.

2) Грассм многочлен: сумма грассм. одночленов.

3) • Складывая грассм. многочлены мы пишем их вместе и приводим подобные члены.

• Умножая грассм. многочлены мы "раскрываем скобки" — перемножаем соответствующие одночлены и приводим подобные члены.

Примеры

1) $$(a\hat{x}_1 + b\hat{x}_2)(c\hat{x}_1 + d\hat{x}_2) =$$
$$= ac\cdot\hat{x}_1\cdot\hat{x}_1 + bc\,\hat{x}_2\hat{x}_1 + ad\,\hat{x}_1\hat{x}_2 + bd\,\hat{x}_2\cdot\hat{x}_2 =$$
$$= 0 - bc\,\hat{x}_1\hat{x}_2 + ad\,\hat{x}_1\hat{x}_2 + 0 = (ad-bc)\,\hat{x}_1\hat{x}_2.$$

2) Пусть $(a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3 + a_n\hat{x}_n) = \hat{s}$, тогда
$$\hat{s}\cdot\hat{s} = \sum_{i,j} a_i a_j\,\hat{x}_i\hat{x}_j = \sum_i a_i^2\,\hat{x}_i\hat{x}_i + \sum_{i<j}(a_i a_j\,\hat{x}_i\hat{x}_j + a_j a_i\,\hat{x}_j\hat{x}_i) =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

Предл. Если $\hat{a} = a_1\hat{x}_1 + \dots + a_k\hat{x}_k$, $\hat{b} = b_1\hat{x}_1 + \dots + b_k\hat{x}_k$, то
$$\hat{a}\cdot\hat{b} = -\hat{b}\cdot\hat{a}$$

Аналогично

3) Вычислить

Снова $\hat{x}_3\cdot\hat{x}_2\cdot\hat{x}_3 = 0$

$$(a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3)(b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2 + b_3\hat{x}_3)(c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + c_3\hat{x}_3) =$$
$$= \Big(\sum_{\sigma\in S_3} a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)}\cdot\epsilon(\sigma)\Big)\,\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3 = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\cdot\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3.$$

Предложение. Пусть A матрица $n\times n$ с элементами a_{ij} и
$$\hat{s}_i = a_{i1}\hat{x}_1 + \dots + a_{in}\hat{x}_n$$
— линейные грассм. многочлены соответствующие строкам A

~~Заметь:~~ Тогда
$$\hat{s}_1\cdots\hat{s}_n = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\cdot\epsilon(\sigma)\cdot\hat{x}_1\cdots\hat{x}_n =$$
$$= (\det A)\cdot\hat{x}_1\cdots\hat{x}_n$$

Док. Мы просто берем по одному члену в каждом $\hat{s}_i$:
$$\sum a_{1,i_1}\, a_{2,i_2}\cdots a_{n,i_n}\,\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_n}$$
но все $i_1\dots i_n$ — различны, значит перестановка и знак возникает! ■