Лекция 8: Лин. Операторы на V 02.12.08 | 8 = 1 =

Опр: Лин. оператор := лин. отображение вект. простр. в себя.

$$h: V \longrightarrow V$$ Матрица лин. оператора – квадратная!

• Сначала одна формула

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

одеваем сначала майку, потом рубашку,
снимаем сначала рубашку, потом майку

$$V \underset{B^{-1}}{\overset{B}{\rightleftarrows}} V \underset{A^{-1}}{\overset{A}{\rightleftarrows}} V$$

или $AB \cdot B^{-1}A^{-1} = \mathbb{1}$

$B^{-1}A^{-1} \cdot AB = \mathbb{1}$.

То же для большего числа сомножителей.

• Матрица оператора и базисов.

Опр: Пусть есть V, базис $e_* = e_1, \dots, e_n$, $n = \dim V$

и $h: V \to V$. || Для $x \in V$ будем обозначать $[x]$ столбец координат x отн. e_*

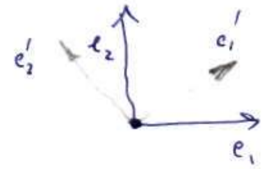
Тогда $H := (\dots [e_i'] \dots)$

где $e_i' := h(e_i)$

Матрица H составлена из координат образов базисных векторов (записанных по столбцам).

Пример: $h = r_\varphi$

$$[e_1'] = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad [e_2'] = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$



$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Если перемножить (1) $R_\alpha \cdot R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta}$!

(2) $R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$ ⟨лучший способ запомнить формулы $\cos$, $\sin$ суммы⟩

Вообще говоря образы ~~к~~ $\{e_i'\}$ не образуют базис, но бывает что и образуют. $\boxed{8 = 2 =}$

(матрица составленная из коорд. $[e_i']$ относительно e_* имеет две роли):

Если есть h и

$e_i' = h(e_i)$, то

$H = (\dots [e_i'] \dots)$ это

матрица оператора h относит. e_*

Если $y = h(x)$, $x \in V$, то

$[y] = H \cdot [x]$

Если e_*' тоже базис, то мы можем рассмотреть новую (штрихованную) систему коорд наряду с первоначальной.

Опр: матрица $H = (\dots [e_i'] \dots)$ называется матрицей перехода от e_* к e_*'.

Если $z \in V$, то

$[z]' = H^{-1} \cdot [z]$

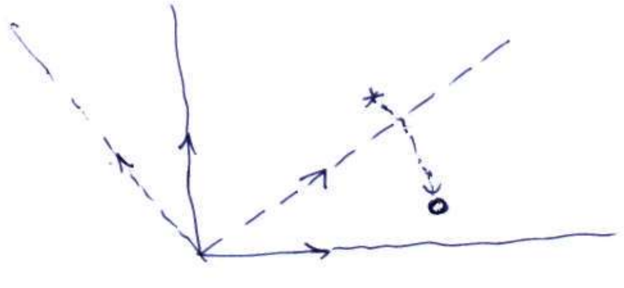
Почему?

Объяснение 1: Эффект поезда:

мир перемещается вправо $\equiv$ наблюдатель перемещается в противоположную сторону.

<поговорить: поезд; руки перед глазами>

Объяснение 2: Картинка



Новые координаты звезды те же как старые коорд звезды повернутой на $-\varphi$.

Если бы мы не знали, что это земля поворачивается, нам бы казалось, что это небо движется в обратную сторону. (со всеми звездами прикрепленными к небу).

Обычно матрицу оператора и матрицу перехода обозначают разными буквами

$$\underline{[Y] = H\cdot[X]} \qquad\Big|\qquad (*)\ \underline{[z]' = C^{-1}[z]} \qquad C = (\cdots[e_i']\cdots)$$

$H = (\cdots[e_i']\cdots)$, $e_i' = h(e_i)$

<u>Вопрос</u> Матрица оператора в новом базисе: $H' = ?$

$$[Y]' = \ ?\ \cdot[X]'$$

Заметим

$$[X] = C\cdot[X]'$$

$$[Y]' = C^{-1}\cdot[Y] \qquad [Y] = H\cdot[X]$$

<u>собирая:</u> $[Y]' = C^{-1}\cdot H\cdot C\cdot[X]' \iff$ $\boxed{H' = C^{-1}\cdot H\cdot C}$ нов. через старую

$\boxed{H = C\cdot H'\cdot C^{-1}}$ стар. через новую

Однако почему (*)?

для слепых не ездивших в поезде.

<u>Док:</u> Если (*) верна для z_1 и z_2, то верна и для суммы:

$$[z_1+z_2]' = [z_1]'+[z_2]' = H^{-1}\cdot[z_1] + H^{-1}\cdot[z_2] = H^{-1}[z_1+z_2]$$

То же и для лин. комбинации двух или более векторов!

Заметим, что есть вектора, для которых (*) легко проверить: это e_i'. Имеем

$$[e_i']' = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = (i\text{-й столбец } C) = [e_i']$$ (по определению матр. перехода)

То есть $C\cdot[e_i']' = [e_i']$ или $[e_i']' = C^{-1}\cdot[e_i'] \Rightarrow$ (*) верна для всех векторов нового базиса

$\Longleftarrow$ (*) верна для всех $z \in V$

Пример (Матрица оператора может быть проще в новом базисе.) Пусть $H = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Заметим что $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и H' будет $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Вопрос Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} H^n$.

Решение Речь идет о $\left(\frac{1}{4}H\right)^n$. Посчитаем в новом базисе.
Это будет $\left(\frac{1}{4}H'\right)^n = \left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Заключаем, что первоначальный предел равен

$$\lim\ldots = C\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \mathbb{P}.$$

(можно перейти к старому базису и „до предела", а потом взять предел).

Заметим, что $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$. Заметим также, что $\frac{1}{4^n}$ не случайно!

Теорема Пусть $p: V \to V$ линейный оператор.

$p^2 = p \iff \exists$ базис e_*, такой что матрица $\mathbb{P}$ оператора p имеет вид $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ (диагональна, с 1 и 0 на диагонали).

$\Updownarrow$

$\exists\ V = U_1 \dotplus U_0$ — разложение в прямую сумму

и $p = pr_1$ (проектирование на U_1 вдоль U_0)

Замечание для $\Updownarrow$ можно не предполагать, что V — конечномерно.

8 =5=

Док: (⇓). Пусть $p^2 = p$ или $p(p-1) = 0$

Положим $U_1 := \operatorname{Im} p$, $U_0 := \operatorname{Im}(p - 1)$

Лемма: $U_1 + U_0 = V$. Действительно $x = p(x) + (p-1)(-x)$!

Наблюдения: $U_0 \subset \operatorname{Ker} p$ (т.к $p(p-1)x = 0$),

$U_1 \subset \operatorname{Ker}(p - 1)$ (т.к $(p-1)p(x) = 0$).

Лемма: $z \in U_0 \cap U_1 \Rightarrow z = 0$.

Действительно $z = p(z) - (p-1)(z) = 0$.

Предл: $V = U_1 + U_0$, $U_0 \cap U_1 = 0 \Rightarrow$ сумма прямая.

Док: Надо установить единств. разложения 0:

Если $0 = u_1 + u_0$, то $u_0 = -u_1 \in U_0 \cap U_1$
$\overset{\shortparallel}{0}$ ∎

Теперь (⇑):

Очевидно что $(pr_1)(pr_1) = (pr_1)$. Вернее:

Если $z \in U_1$, то $pr_1(z) = z \Leftarrow z = z + 0$ - разложение.

(⇒) Если есть $V = U_1 \dotplus U_0$, то базис $e_1 \dots e_k$ для U_1 вместе

с базисом $e_{k+1} \dots e_n$ для U_0 дают базис V $\Rightarrow$ матрица для pr_1 $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

(⇐) Очевидно. $U_1 = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ (те вектора, где 1 на диагонали)

$U_0 = \langle e_{k+1} \dots e_n \rangle$ (те вектора, где 0 на диагонали) ∎

Замечание: Ясно, что $U_1 = \ker(p - 1)$,

$U_0 = \ker(p - 0)$.

Теорема. Пусть $r: V \to V$ - лин оператор. Тогда

$r^2 = \mathbb{1} \Leftrightarrow \exists$ разложение в прямую сумму $V = U_1 \dotplus U_{-1}$ и $U_1 = \ker(r - \mathbb{1})$, $U_{-1} = \ker(r + \mathbb{1})$.

Докажем более общий результат.

Теорема: Пусть $r: V \to V$ лин. оператор, и

$$(r - \lambda_1 \mathbb{1})(r - \lambda_2 \mathbb{1})(r - \lambda_3 \mathbb{1}) = 0 \qquad \{\lambda_i\} \text{ - различны.}$$

тогда для $U_i = \ker(r - \lambda_i \mathbb{1})$ сумма

$$U_1 + U_2 + U_3 = V \text{ и прямая.}$$

Док. Разложение $u_1 + u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$. Действительно

$$(r - \lambda_1 \mathbb{1}) u_1 = 0 \Rightarrow r(u_1) = \lambda_1 \cdot u_1$$

$$\Downarrow$$

$$(r - \lambda_2 \mathbb{1})(r - \lambda_3 \mathbb{1}) u_1 = \underline{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot u_1} \quad (1)$$

В то же время $u_1 = -u_2 - u_3$, значит

$$(r - \lambda_2 \mathbb{1})(r - \lambda_3 \mathbb{1}) u_1 = -(r - \lambda_3 \mathbb{1})(r - \lambda_2 \mathbb{1}) u_2 - (r - \lambda_2 \mathbb{1})(r - \lambda_3 \mathbb{1}) u_3 = 0 + 0$$

сопоставляя с (1) и учитывая что $(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ получаем $u_1 = 0$.

Замечание: Ясно что $(r - \lambda_3 \mathbb{1})(r - \lambda_2 \mathbb{1}) =$

$$= r^2 - \lambda_3 r - \lambda_2 r - \lambda_3 \cdot \lambda_2 \mathbb{1} = (r - \lambda_2 \mathbb{1})(r - \lambda_3 \mathbb{1}).$$

Аналогично: $u_2 = 0$, $u_3 = 0$. Значит сумма прямая.

Почему сумма - это всё V?

Лемма $\mathbb{1} = \alpha_1 (r-\lambda_2\mathbb{1})(r-\lambda_3\mathbb{1}) + \alpha_2 (r-\lambda_1\mathbb{1})(r-\lambda_3\mathbb{1}) + \alpha_3 (r-\lambda_1\mathbb{1})(r-\lambda_2\mathbb{1})$

где $\alpha_1 = (\lambda_1-\lambda_2)^{-1}(\lambda_1-\lambda_3)^{-1}$, $\alpha_2 = (\lambda_2-\lambda_1)^{-1}(\lambda_2-\lambda_3)^{-1}$, $\alpha_3 = (\lambda_3-\lambda_1)^{-1}(\lambda_3-\lambda_2)^{-1}$.

Применим к произвольному $x \in V$.

Ясно что

$$u_1 := \alpha_1 (r-\lambda_2\mathbb{1})(r-\lambda_3\mathbb{1})(x) \in U_1$$
$$u_2 := \alpha_2 (r-\lambda_1\mathbb{1})(r-\lambda_3\mathbb{1})(x) \in U_2$$
$$u_3 := \alpha_3 (r-\lambda_1\mathbb{1})(r-\lambda_2\mathbb{1})(x) \in U_3$$

и мы получаем разложение $x = u_1 + u_2 + u_3$.

Док. леммы.

Пусть $g(x) = \alpha_1 (x-\lambda_2)(x-\lambda_3) + \alpha_2 (x-\lambda_1)(x-\lambda_3) + \alpha_3 (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) - 1$

Это многочлен степени ≤ 2, но

$$g(\lambda_1) = g(\lambda_2) = g(\lambda_3) = 1 - 1 = 0$$

Значит $g(x) = 0$, откуда следует лемма.

Теорема тем самым доказана.