Метод ортогонализации Грама-Шмидта

Это один из методов · четких вычислительных процедур

Имеем (ненулевые) вектора $v_1, v_2, \ldots, v_m$ в евклидовом пр. V

Хотим получить из них вектора $s_1, s_2, \ldots, s_m$, которые будут:

(1) попарно ортогональны

(2) иметь вид $s_i = v_i +$ лин. комб. <u>предыдущих</u>

Слово <u>предыдущих</u> поясним далее.

Начало простое: $s_1 = v_1$ (предыдущих нет).

$$s_2 = v_2 + a \cdot v_1, \quad a \in R$$

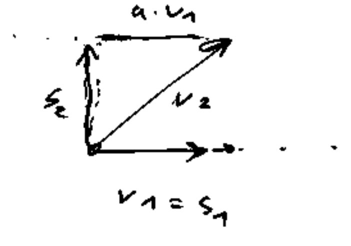
Чтобы найти s_2 надо найти a!

Находим из условия $(s_2, s_1) = 0$ - ортогональность.

$$0 = (s_2, s_1) = (v_2, v_1) + a \cdot (v_1, v_1)$$

Значит $a = -\dfrac{(v_2, v_1)}{(v_1, v_1)}$ - однозначно находится.

Картинка: было v_1, v_2 стали s_1, s_2



Очень естест-венное построение.

$\boxed{5}$ =2=

Для s_3 у нас есть некоторый выбор.

или записать

поправка - добавка

$$\left.\begin{array}{l} s_3 = v_3 + a\cdot v_1 + b\cdot v_2 \\ \text{или} \quad s_3 = v_3 + \alpha\cdot s_1 + \beta\cdot s_2 \end{array}\right\} = v_3 + q$$

В любом виде поправка - <u>лин. комб. предыдущих</u>.

Давайте обозначать лин. комб - линейную оболочку

как $\underline{\langle u_1 \dots u_k\rangle_{\text{лин}}} := \text{span}(u_1 \dots u_k)$ - <u>короче</u>

Заметим $\langle s_1, s_2\rangle_{\text{лин}} = \langle v_1, v_2\rangle$ лин.

- то что выражается через $v_1 v_2$ - выраже и через $s_1 s_2$ и наоборот:

$$\begin{array}{l} s_1 = v_1 \\ s_2 = v_2 + a\cdot v_1 \end{array} \iff \begin{array}{l} v_1 = s_1 \\ v_2 = s_2 - a\cdot s_1 \end{array}$$

Мы построили "два базиса в одном и том же двумерном подпространстве.

<u>Далее.</u> Находим эту поправку q.

Если $q = \alpha\cdot s_1 + \beta\cdot s_2$ то. условия $(s_1 s_3) = 0$, $(s_2 s_3) = 0$

дают

$$0 = (s_1\cdot v_3) + \alpha\cdot(s_1\cdot s_1) + 0$$

$$0 = (s_2\cdot v_3) + 0 + \beta\cdot(s_2\cdot s_2)$$

$$\alpha = -\frac{(v_3 \cdot s_1)}{(s_1 , s_1)} \quad ; \quad \beta = -\frac{(v_3 \cdot s_2)}{(s_2 , s_2)}$$

$\boxed{5} = 3 =$

А в виде $q = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$ приходится решать систему

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (v_1 \cdot s_3) = (v_1 \cdot v_3) + a \cdot (v_1 \cdot v_1) + b\,(v_1 \cdot v_2) \\ 0 &= (v_2 \cdot s_3) = (v_2 \cdot v_3) + a\,(v_2 \cdot v_1) + b\,(v_2 \cdot v_2) \end{aligned}\right\}$$

Так как: $x \perp \langle s_1 , s_2 \rangle_{\text{лин}} \Leftrightarrow x \perp \langle v_1 , v_2 \rangle_{\text{лин}}$

$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

$x \perp s_1$, и $x \perp s_2 \qquad\qquad x \perp v_1$ и $x \perp v_2$.

Пример. Пусть есть v_1 , v_2 , v_3 в $\mathbb{R}^3$ стандартном (с прямоуг. сист. координат)

$v_1 = (1,\ 1,\ 1)$; $v_2 = (0,\ 1,\ 0)$; $v_3 = (1,\ 0,\ 0)$

$s_1 = v_1 = (1, 1, 1)$ $\qquad (v_1 \cdot v_1) = 3$; $(v_1 \cdot v_2) = 1$

$s_2 = v_2 - \frac{1}{3} v_1 = \left(-\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$

Дальше: напишем $s_3 = v_3 + a \cdot v_1 + b \cdot v_2$ $\qquad ; (v_2 \cdot v_2) = 1$

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + a \cdot 3 + b \cdot 1 \\ 0 &= 0 + a \cdot 1 + b \cdot 1 \end{aligned} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \ ; \ b = +\frac{1}{2}$$

$s_3 = \left(\frac{1}{2} ; 0 ; -\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2}\,(1,\ 1,\ 1) \\ +\frac{1}{2}\,(0,\ 1,\ 0) \\ (1,\ 0,\ 0) \\ \hline \end{array}$$

$|5| = 4 \neq$

Что мы проделали? – подправили высоту в основании, потом – высоту в параллелепипеде.

<u>Пример 2</u> v_1, v_2, v_3 в $C[0,1]$, $(f\cdot g) = \int_0^1 f\cdot g\, dx$

$v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$.

Как и раньше: $s_1 = v_1 = 1$

$$s_2 = x + a\cdot 1 \qquad a = -\frac{(v_2\cdot v_1)}{(v_1\cdot v_1)} = -\frac{1/2}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$= x - \frac{1}{2}$$

$$s_3 = x^2 + b\cdot x + a\cdot 1$$

$$0 = (v_1\cdot s_3) = \frac{1}{3} + b\cdot\frac{1}{2} + a\cdot 1$$

$$0 = (v_2\cdot s_3) = \frac{1}{4} + b\cdot\frac{1}{3} + a\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{2}{3} + \cdot b + 2\cdot a & 2\cdot \mathrm{I} \\ 0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\cdot b + 0 & 2\cdot \mathrm{II} - \mathrm{I} \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$\frac{1}{6}\cdot b = -\frac{1}{6}$

$b = -1 \qquad a = \ + \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \quad s_3 = x^2 - x + \frac{1}{12}\ ; \quad s_2 = x - \frac{1}{2}\ ; \quad s_1 = 1$$

"Движения"

<u>Опр:</u> Линейное преобразование (оператор) называется <u>ортогональным</u> если $\forall\, x, y \in V$ (евкл.)

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$$ – сохр ск. произв.

<u>Обозначение</u>: $\varphi \in O(V)$ – все орт. операторы на V

<u>Утв:</u> Если $\varphi : V \longrightarrow V$ сохраняет длину, то $\varphi \in O(V)$ – ортогонален ($\Leftrightarrow \|\varphi(x)\| = \|x\|$)

на самом деле $\Leftrightarrow$

<u>Док:</u> И сполз знаем формулу:

$$(x \cdot y) = \frac{1}{2}\Big((x+y, x+y) - (x \cdot x) - (y \cdot y)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad (\varphi x \cdot \varphi y) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(x+y)\|^2 - \|\varphi(x)\|^2 - \|\varphi(y)\|^2\right) =$$

$\|$ $\|$ $\|$ $\leftarrow$ сохр. длину

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = (x \cdot y) \;\blacksquare$$

<u>Утв.</u> Орт. оператор – обратим (на конечномерном V).

Действ. Заметим, что $x \in \ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$

тогда $\|\varphi(x)\| = 0$

$$\overset{\|}{\|x\|} \Rightarrow x = 0. \text{ Отсюда – обратим.}$$

Пример $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ — метрое отражение $\in \langle e_1\ e_2\ e_3 \rangle_{\text{лин}}$ — "зеркало".

Пример: $\exists$ $\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{array}\right) = \varphi.$

Вычислить $\varphi^m \rightsquigarrow$ $m\alpha_1$ $m\alpha_2$ — углы увеличиваются в m раз!

Док:

Ключевая лемма: Если U φ-инвариантное подпростр $\subset V$, то $U^\perp$ — тоже φ-инвариантно!

Док. Напомним

$$x \in U^\perp \Leftrightarrow \forall u \in U: \ (u \cdot x) = 0.$$

Заметим, что $\varphi: U \to U$ — изоморфизм: т.к. ядро огр. φ на U $= 0$

$$\Rightarrow \forall u \in U \ \ \exists w \in U: \ u = \varphi(w)$$

Теперь (если $x \in U$, то посчитаем)

$$(\varphi(x) \cdot u) = (\varphi(x), \varphi(w)) = (x \cdot w) = 0.$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \in U^\perp.$$

Далее всюду — V - конечномерно

Утв: $\varphi \in O(V) \Rightarrow \varphi^{-1} \in O(V)$.

Док-во: φ - обратим $\Rightarrow \forall y \; \exists x : y = \varphi(x)$

$$x = \varphi^{-1}(y)$$

тогда $\|x\| = \|\varphi(x)\| = \|y\| \Rightarrow \|\varphi^{-1}(y)\| = \|y\| \Rightarrow \varphi^{-1} \in O(V)$.

Сл. $O(V)$ группа по умножению.

Конечно $\varphi \in O(V)$, $\psi \in O(V)$ то

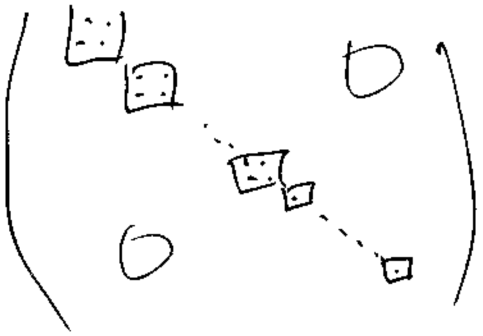
$$\|\psi(\varphi(x))\| = \|\varphi(x)\| = \|x\| \Rightarrow \psi\varphi \in O(V).$$

и $\varphi^{-1} \in O(V) \rightarrow$ группа.

Теорема о клеточно диагональном виде:

Пусть V - конечномерное евкл. простр. $\varphi \in O(V)$

тогда $\exists$ ортонорм. базис $e_1, \dots, e_n$ в котором матрица Φ оператора φ имеет клеточно-диагональный вид



с клетками 2×2 или 1×1 по диагонали.

Причем клетки 2×2 имеют вид $\begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ с некоторыми α_i

а клетки 1×1 имеют вид:

$$(1) \quad \text{или} \quad (-1)$$

(неформально) — φ - сист. вращений в двумерных плоскостях и отр. в нек. одном

Теперь индукцией по разм. докажем

Лемма 2: V = (прямая сумма) U_i, $\dim U_i = 1, 2$.
попарно орт. подпростр

Док: $\dim V \le 2$ – доказывать нечего.

$\dim V > 2 \Rightarrow$ сущ. 2-мерное инв. подпр!
у любого оператора над $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow V = U_1 \dotplus U_1^{\perp}$ применяем индукцию к $U_1^{\perp}$. ■

Док теор. Остается выбрать базис, согл с разложением в ортогональную прямую сумму. ■