Лекц. 4 Новая тема — евклидовы пространства

1) Обсуждение:

Рассм. обычное 3-х мерное простр. над $\mathbb{R}$ (векторы) с прямоуг. сист. координат

Есть длина вектора $\bar a=(a_1,a_2,a_3)$, которая вычисляется как

$$\|\bar a\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \quad \text{(из теоремы Пифагора)}$$

Есть "теорема косинусов"

$$\|\bar a+\bar b\|^2 = \|a\|^2+\|b\|^2+2\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\varphi_{ab}$$

где φ — угол между $\bar a$ и $\bar b$ (внешний угол треугольника)

С другой стороны считаем через координаты

$$\sum_{i=1,2,3}(a_i+b_i)^2 = \sum a_i^2+\sum b_i^2 + 2\cdot\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\varphi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{i=1,2,3} a_i b_i = \|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\varphi.}$$

В прямоугольной сист. коорд.: выражение

$$(\bar a;\bar b) := \sum a_i b_i$$

— называется скалярное произведение векторов $\bar a$ и $\bar b$.

Заметим — это функция двух векторных аргументов со значениями в $\mathbb{k}=\mathbb{R}$: $V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Обобщим введём скалярное

Опр: Скалярным произведением на вект. простр V над $\mathbb{R}$ называется функция $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underset{\text{пара}}{\{a, b\}} \longmapsto \underset{\text{число}}{(a; b)}$$

⟨ традиционно обозначение очень простое - скобки, иногда пишут букву — например $s(a;b)$, но обычно нет! ⟩

Со свойствами

1) линейность по каждому аргументу $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b} \in V$, $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in V$

$$(\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 ; \bar{b}) = \alpha_1 (\bar{a}_1 ; \bar{b}) + \alpha_2 (\bar{a}_2, \bar{b})$$

$$(\bar{a} ; \alpha_1 \bar{b}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{b}_2) = \alpha_1 (\bar{a}, \bar{b}_1) + \alpha_2 (\bar{a}, \bar{b}_2)$$

2) симметричность $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$$

3) положительная определенность (иногда говорят "положительность")

$\forall v \neq 0 \quad (\bar{v}, \bar{v}) \neq 0.$

Заметим, что скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$

$$(\bar{a} ; \bar{b}) := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- обладает свойствами (1)(2),(3) !

Предложение (неравенство Коши-Буняковского-Шварца)

Если $\bar{a}, \bar{b} \in V$ и лин. независимы, то

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 < (\bar{a}.\bar{a}) \cdot (\bar{b}.\bar{b})$$

(Если зависимы, то ... = ... !).

Всегда .. ≤ ..

Док: Если $\bar b = 0$, то зависим и … Иначе рассм $v = \bar a + t\bar b$; и

$$(v;v) = (\bar a + t\bar b ; \bar a + t\bar b) = (\bar a, \bar a) + t(\bar b;\bar a) + t(\bar a, \bar b) + t^2(\bar b, \bar b)$$

$$= t^2(\bar b, \bar b) + 2(\bar a, \bar b)t + (\bar a, \bar a) > 0$$

$=$ только если $\bar a + t\bar b = 0$ зависим

т.огда дискриминант квадратного трехчлена

$$d = (\bar a . \bar b)^2 - (\bar a, \bar a)(\bar b, \bar b) > 0 \quad \text{- нет корней}$$
$$= \quad \text{- есть 1 кратный корень}$$

Неравенство доказано. (или можно подставить $t_0 = -\dfrac{(\bar a, \bar b)}{(\bar b, \bar b)}$) □

Определение: пространство V над $\mathbb{R}$ с выбранным (и зафиксированным) скалярным произведением называется евклидовым векторным пространством. (абстрактным!

Пример: ① $\mathbb{R}^n$, $(\bar a . \bar b) := \sum a_i b_i$

② $C[0,1]$; $(f, g) := \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\, dx$

непрерывные функции на $[0,1]$ (проверьте свойство (3) !)

В евклидовом пространстве определены:

длина вектора $\|v\| := \sqrt{(v;v)}$ — по определению

cos. угла между двумя векторами (ненулевыми) $\cos \varphi_{ab} := \dfrac{(\bar a, \bar b)}{\|\bar a\| \cdot \|\bar b\|}$ — корректно, т.к квадрат правой части $0 \le \dots \le 1$ по нерав. Коши Б. !

Заметим $\cos^2 \varphi = 1 \Leftrightarrow$ векторы лин. зависимы

$\varphi = 0$, или π

Определение <u>ортогональности</u> векторов:

$$\bar a \perp \bar b \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow (\bar a, \bar b) = 0$$

(удобно считать что нулевой вектор ортогонален любому)

<u>Опр</u> $\bar a \perp \bar b \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\bar a, \bar b) = 0.$

Теорема о "трех перпендикулярах":

$\bar a \perp \bar b$ и $\bar a \perp \bar c \Leftrightarrow \bar a \perp$ плоскости $\operatorname{span}(\bar b, \bar c)$.

Действ. $(\bar a; r\bar b + s\bar c) =$
$= r(\bar a, \bar b) + s(\bar a, \bar c) = 0$

<u>Теорема косинусов.</u> — очевидна (по существу — стала определением)

$$\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = (a,a) + (a,b) + (b,a) + (b,b) =$$
$$= (a,a) + (b,b) + 2(a,b) =$$
$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\varphi_{ab}.$$

<u>Следствие:</u> Зная длины $\bar a, \bar b$ и $\bar a + \bar b$, мы вычислим ск. произведение по формуле

(*) $$(\bar a, \bar b) = \frac{1}{2}\left[\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right]$$ - формула поляризации!

⟨Здесь из "квадратичной функции" $\|x\|^2$ мы находим билинейную!⟩

<u>Теорема Пифагора</u> Если вектора $\bar v_1, \dots, \bar v_k$ попарно ортогональны, и $\bar u = \bar v_1 + \dots + \bar v_k$, то

$$\|\bar u\|^2 = \sum \|v_i\|^2$$

Заметим, что при $k=2$, верна "обратная теор":

$$\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = \|v_1+v_2\|^2 \Rightarrow v_1 \perp v_2. \quad (\text{из } (*))$$

|4| = 5 =

Определение Ортогональная ~~...~~ система векторов $\Leftrightarrow$ векторы (ненулевые и) попарно ортогональны

Предл. Ортогональная сист. векторов линейно независима.

Действ. Если $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = 0$, то по т. Пифагора

$$\sum \|\alpha_i v_i\|^2 = 0 \Rightarrow \overset{\text{все}}{\|\alpha_i v_i\|} = |\alpha_i| \cdot \underset{\neq 0}{\|v_i\|} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_i = 0}.$$

Сл.: $k \le \dim V$. число попарно ортогональных векторов $\le \dim V$.

Определение: Ортогональный базис — базис и ортогональная система

Ортонормированный базис — ортогональный базис и длины базисных векторов равны 1.

Ортонорм. система — ортогональная и длина векторов 1.

Очевидно.: Если $v_1, \dots v_n$ — ортогональный базис, то

$e_i = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot v_i$ — определяют орто.нормированный базис.

Если построить ортогональный базис, то легко перейти к орт.норм — нормировать длину.

Теорема: Пусть $e_1 \dots e_n$ ортонорм. базис.

Тогда $\forall x \in V$: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} (x; e_i) \cdot e_i$

Док: Представим $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

Посчитаем $(x; e_1) = (e_1; x) = \alpha_1 \cdot (e_1 \cdot e_1) + \alpha_2 (e_1 \cdot e_2) + \dots + \alpha_n (e_1 \cdot e_n) =$

$= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_1$

Аналогично $\forall i$: $\underline{(x, e_i) = \alpha_i} \Rightarrow x = \sum (x \cdot e_i) e_i$ ∎

Предл. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — ортонормированная система.

Тогда $\forall x \in V$, вектор
$$p = \left(\sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i - x \right)$$ ортогонален $e_1, \dots, e_k$.

Док: Посчитаем $(p, e_1) = (x, e_1)\cdot(e_1, e_1) + (x, e_2)\cdot(e_2, e_1) + \dots + (x, e_n)(e_n, e_1) - (x, e_1)$
$$= (x, e_1)\cdot 1 + 0 \dots + 0 - (x, e_1) = 0$$

Аналогично $(p, e_i) = 0 + \dots + (x, e_i)\cdot 1 + \dots 0 - (x, e_i) = 0$ ■

Теорема. Пусть $e_1, \dots e_k$ ортонормированный базис в подпростр. $U \subset V$,

и $U^\perp = \{ v \in V \mid (v, u) = 0$ при любом $u \in U \}$ (#)

Тогда: $V = U \dotplus U^\perp$ (#) ⇒ для любой пары $u \in U$, $v \in U^\perp$ $(v, u) = 0$

$$\pi_u(x) = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i$$ есть проекция x на U в этом разложении

$$q(x) = x - \pi_u(x) = x - \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i$$ есть проекция x на $U^\perp$ в этом разложении.

Опр. Формула (#) определяет по подпространству U другое подпростр $U^\perp$ называемое ортогоналом к U.

Лемма $U \cap U^\perp = 0$.

действительно, если $x \in U \cap U^\perp$ то $(x, x) = 0$ так как x играет роль и $U^\perp \ni v$ и $u \in U$ $\Rightarrow x = 0$.

Теперь — док теоремы:

Берем x строим $r_u(x) \in \mathcal{U}$ по построению.

Теперь $q(x) = x - r_u(x) = -p$ (из Предложения следует,

что $q(x) \perp e_i$ при $i=1,\dots,k$. Тогда $q(x) \perp$ любой линейной комбинации e_i

то есть любому $u \in \mathcal{U}$.

Значит $q(x) \in \mathcal{U}^\perp$ и мы получаем разложение

$$x = \underbrace{r(x)}_{\in\, \mathcal{U}} + \underbrace{q(x)}_{\in\, \mathcal{U}^\perp} \Rightarrow \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp = V$$

На самом деле:

<u>Предложение</u>: В любом конечномерном пространстве существует ортонормированный базис.

<u>Сл. 1</u> Если $\mathcal{U} \subset V$ (конечномерно), то $V = \mathcal{U} \dotplus \mathcal{U}^\perp$ всегда прямая сумма в <u>евклидовом</u> пространстве

<u>Заметим</u>, что V может быть и бесконечномерно, мы применяем предложение к $\mathcal{U}$.

<u>Сл. 2</u> В условиях Сл. 1 $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$.

<u>Док.</u> Пусть $z = x+y \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$, тогда $y \in \mathcal{U}^\perp$ и $z \in \mathcal{U}$.

$0 = (z,y)$, но $= (x,y) + (y,y) = 0 + (y,y) \Rightarrow y = 0$