Лекция 3. Об инвариантных подпространствах

Пусть есть линейный оператор $A : V \to V$.

Как построить инвариантное подпространство?

1) Например $\ker A = \{x \in V \mid A \cdot x = 0\} =: U$

Ясно что $x \in U \Rightarrow Ax = 0 \in U$. $\Rightarrow$ инвариантно.

Или $\ker A^2 = \{x \in V \mid A^2 \cdot x = 0\} =: U$

$x \in U \Rightarrow Ax$ - уже не обязательно 0, но

$A^2(Ax) = A \cdot A^2 x = 0 \Rightarrow Ax \in U$. $\Rightarrow$ инвариантно.

Обобщим: пусть $U = \ker f(A)$ - будет ли инвариантно?

$x \in U$, то $Ax \overset{?}{\in} U$ - проверим

$f(A) \cdot Ax = A \cdot f(A) x = 0$ - будет $\in U$.

(Ясно, что $f(A) \cdot A = A \cdot f(A)$!).

Например $V = k[x]$, $A = \frac{d}{dx}$.

$\ker A = k \cdot 1$ - константы

$\ker A^2 = \{f = ax + b\}$ - многочлены степени ≤ 1

$\ker A^3 = \{f = ax^2 + bx + c\}$ - многочлены степени ≤ 2.

- это все инвариантные подпространства, естественно!

~~[illegible]~~

2) Другая конструкция: рассмотрим $\operatorname{Im} A = \{x \in V \mid x = Ay$ для некоторого $y \in V\}$

Конечно: $x = Ay \Rightarrow Ax = A(Ay) \in \operatorname{Im} A$.

$\operatorname{Im} A$ — всегда инвариантен относительно A.

Что если взять $U := \operatorname{Im} f(A) = \{x \in V \mid x = f(A)y$ для некоторого $y \in V\}$

Снова $Ax = A \cdot f(A)y = f(A)(Ay) \in \operatorname{Im} f(A)$

и — инвариантно.

3) Если есть два подпространства:

$\ker(A^2 - E)$ и $\operatorname{Im}(A^3 + 3A)$, то

$U := \ker(A^2 - E) \cap \operatorname{Im}(A^3 + 3A)$ — тоже инвариантно.

<u>Лемма</u> Если U_1, U_2 — инвариантны, то

$U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ — снова инвариантны.

<u>Док:</u> $x \in U_1 + U_2 \Leftrightarrow x = x_1 + x_2$, $x_i \in U_i$

$\Downarrow$

$Ax = Ax_1 + Ax_2 \Leftarrow Ax_i \in U_i$ из инвариантности

по линейности

и будет $Ax \in U_1 + U_2 \Rightarrow U$ инвариантно ∎

Если $x \in U_1 \cap U_2$, то $Ax \in U_1$ и $Ax \in U_2 \Rightarrow Ax \in U_1 \cap U_2$. ∎

3) <u>Еще конструкция</u>: подпространство, натянутое на соб. вектора.

Пусть есть v_1, v_2, v_3, такие что $Av_i = \lambda_i v_i$ — тогда

Их линейная оболочка $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) = \{x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_i \in \Bbbk\}$

будет A-инвариантна.

Действительно $Ax = (\alpha_1 \lambda_1)x_1 + (\alpha_2 \lambda_2)v_2 + (\alpha_3 \lambda_3)v_3$ — тоже линейная комбинация $\in \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ ∎

4) Линейное подпространство не может быть "слишком маленьким"

Предл. Пусть v_1, v_2, v_3 — соб. вектора: $Av_i = \lambda_i v_i$ и их соб. значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны.

Тогда если U — A-инвариантно, $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in U$ и $\alpha_i \neq 0$ (все)

то $\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3) \subset U$.

Действительно, мы знаем, что

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in U$$

$$Ax = (\alpha_1\lambda_1) v_1 + (\alpha_2\lambda_2) v_2 + (\alpha_3\lambda_3) v_3 \in U$$

$$A^2 x = (\alpha_2 \lambda_1^2) v_1 + (\alpha_2 \lambda_2^2) v_2 + (\alpha_3 \lambda_3^2) v_3 \in U$$

$$\Rightarrow (Ax - \lambda_1 x) = 0 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) v_3 \in U$$

$$(A^2 x - \lambda_1 A x) = 0 + \alpha_1(\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1) v_2 + \alpha_3(\lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3) v_3 \in U$$

$$\Rightarrow (A^2 x - \lambda_1 A x) - \lambda_2 (Ax - \lambda_1 x) = 0 + \alpha_3 \left(\lambda_3^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\right) v_3 \in U$$

Заметим — слева

$$\underbrace{\left(A^2 - (\lambda_1+\lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 E\right)}_{f(A)} x = \alpha \cdot \underbrace{\left(\lambda_3^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\cdot\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\right)}_{f(\lambda_3) \neq 0} \cdot v_3$$

где $f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$

$\Rightarrow v_3 \in U$. Аналогично $v_2 \in U$, $v_1 \in U$.

Еще предл:

<u>Предл.</u> Если U — A-инвариантно, и $v \in U$, то

$\operatorname{span}(v, Av, \dots, A^k v) \subset U$. (очевидно!).

<u>Например:</u> $A = \frac{d}{dx}$, $v = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 5x + 1$

Если $U \ni v$, то $Av = 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 5 \in U$

$A^2 v = 20x^3 + 36x^2 + 12x \in U$

$\vdots$

$A^5 v = 5! \in U$

$\Rightarrow$ подпрост многочленов ст. $\leq 5 \subset U$.

— U — не может быть "слишком маленьким".

<u>Предл:</u> Если $\exists$ многочлен $f(t)$, $\deg f = k$, для которого $f(A)v = 0$, то

$U := \operatorname{span}(v, Av, \dots, A^{k-1}v)$ — A инвариантно.

Действительно, пусть $f(t) = x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k$ (умножая на число можно сделать старший коэф $=1$)

Тогда $A \cdot A^{k-1} v = A^k v =$

$= -b_1 A^{k-1} v - \dots - b_k v \in U$

Так как $f(A)v = 0$! Отсюда ясно, что

$AU \subset U$.

Минимальный многочлен оператора.

Определение. Пусть есть оператор A на V.

Многочлен $\mu(t)$ называется минимальным многочленом A, если он аннулирует A и ~~является~~ имеет наименьшую степень среди аннулирующих. Кроме того будем считать, что старший коэффициент $\mu(t)$ равен 1.

Ясно, что если пространство V конечномерно, то мин. многочлен существует и его степень не больше размерности V (ввиду теоремы Гамильтона-Кэли).

Предложение: Если многочлен $f(t)$ делит $\mu(t)$ – минимальный многочлен для A, ~~и~~ $\deg f = k$, то в V существует инвариантное подпространство размерности $\leq k$.

Док: Запишем $\mu(t) = f(t) \cdot g(t)$.

Тогда $g(A) \neq 0$ (иначе это был бы аннулирующий мн. меньшей степени), поэтому

$\exists\ v = g(A)w \neq 0$. При этом $\mu(A)w = f(A)v = 0$.

Рассмотрим $U = \operatorname{span}(v, Av, \dots, A^{k-1}v)$.

Как мы установили $AU \subset U$ и U - инвариантно относительно A.

При этом $\dim U \leq k$. ∎

Сл. Если $k = \mathbb{R}$, и $A : V \to V$ линейный оператор на конечномерном пространстве V, то у A существует двумерное или 1-мерное инвариантное подпространство.

(Это – известная теорема, которую мы будем использовать в дальнейшем).

Действительно, пусть $\mu(t)$ минимальный многочлен для A. Разложим его на неприводимые множители. Такие множители над $\mathbb{R}$ – 1й или 2й степени.

(Если z – комплексный корень $\mu(x)$, то $\bar{z}$ – тоже корень и $(t - z)(t - \bar{z}) = t^2 - (z + \bar{z})\, t + z \cdot \bar{z}$ – многочлен с действительными коэффициентами, который делит $\mu(x)$).

<u>Предложение.</u> $\mu(x)$ делит любой аннулирующий многочлен для A.

<u>Док</u>: Пусть $f(A) = 0$, и $\mu(A) = 0$. Поделим f на μ с остатком: $f(t) = q(t) \cdot \mu(t) + r(t)$, $\deg r < \deg \mu$.

Если $r \neq 0$, то $r(A) = f(A) - q(A) \cdot \mu(A) = 0 - 0 = 0$

получим аннулирующий меньшей степени, чем μ – – противоречие. ∎

Следующий результат довольно "теоретический", но очень важный и используется в разных приложениях.

Теорема Пусть минимальный многочлен $\mu(t)$ для A имеет вид $\mu(t) = f(t)\cdot g(t)$ и НОД $(f, g) = 1$.

Тогда $V = V_1 \dotplus V_2$, где $V_1 = \operatorname{Im} f(A) = \operatorname{Ker} g(A)$

и $V_2 = \operatorname{Im} g(A) = \operatorname{Ker} f(A)$.

Док: Мы знаем НОД $(f, g) = 1 \Rightarrow \exists\, p, q$:

$$p(t)\cdot f(t) + q(t)\, g(t) = 1. \qquad (*)$$

Лемма 1. $\operatorname{Ker} f(A) \cap \operatorname{Ker} g(A) = 0$

Действительно, $x \in \operatorname{Ker} f(A) \cap \operatorname{Ker} g(A)$, то

$$x = p(A)\, f(A)\, x + q(A)\cdot g(A)\, x = 0 + 0 = 0.$$

Лемма 2. $\operatorname{Im} f(A) + \operatorname{Im} g(A) = V$

Действ., для любого $x \in V$ можно записать

$$x = \underset{\operatorname{Im} f(A)}{\underset{\cap}{f(A)\cdot p(A)\, x}} + \underset{\operatorname{Im} g(A)}{\underset{\cap}{g(A)\cdot q(A)\cdot x}} \quad \bullet$$

Лемма 3. $\operatorname{Ker} g(A) \supset \operatorname{Im} f(A)$; $\operatorname{Ker} f(A) \supset \operatorname{Im} g(A)$.

Да $g(A)\cdot f(A) = \mu(A) = 0 \Rightarrow g(A)\cdot f(A)\cdot x = 0 \Rightarrow g(A)\cdot \operatorname{Im} f(A) = 0$.

Аналогично $f(A)\cdot \operatorname{Im} g(A) = 0$.

Сл. $\operatorname{Im} f(A) \cap \operatorname{Im} g(A) = 0$ (из-за леммы 1).

Таким образом

$$V = \operatorname{Im} f(A) \dotplus \operatorname{Im} g(A) \qquad (**)$$

<u>Лемма 4</u>: $\operatorname{Ker} g(A) = \operatorname{Im} f(A)$.

Пусть $z \in \ker g(A)$. Используя $(**)$ разложим

$z = x + y$. Однако $x \in \operatorname{Im} f(A) \subset \ker g(A)$

и $z \in \ker g(A)$

$\Rightarrow y = z - x \in \ker g(A)$

Но $y \in \operatorname{Im} g(A) \subset \ker f(A) \Rightarrow y \in \ker g(A) \cap \ker f(A) = 0$

То есть $y = 0 \Rightarrow z \in \operatorname{Im} f(A) \Rightarrow \ker g(A) = \operatorname{Im} f(A)$.

Аналогично $\operatorname{Ker} f(A) = \operatorname{Im} g(A)$. Теорема доказана.

Замечание об определителях

Задача посчитать определитель 100го порядка

Заметим

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & & & 0 \\ 1 & 5 & 6 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 6 \\ 0 & & & 1 & 5 \end{vmatrix} = d_n$$

и разлагаем по строке

$$d_n = 5 d_{n-1} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & & 0 \\ 0 & 5 & 6 & & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 6 \\ 0 & 0 & & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 d_{n-1} - 6 d_{n-2}.$$

Как найти d_{100}?

Рассмотрим $\mathbb{R}^{100}$ или 100 неизвестных $\boxed{3} = 9 =$

$x_{100}\, x_{99}\, x_{98} - - - - - x_1$

имеем уравнения

$$x_{100} - 5x_{99} + 6x_{98} = 0$$

$$x_{99} - 5x_{99} + 6x_{97} = 0$$

$$\vdots$$

$$x_3 - 5x_2 + x_1 = 0$$

— 98 уравнений, линейно независимых $\Rightarrow$

пространство решений $\underline{2\text{-мерно}}$

Если есть 2 независимых решения, то любое есть их линейная комбинация.

Здесь и знаю два $x_k = 2^k$ $k = 1, 2, \dots, 100$;

и $x_k = 3^k$, $k = 1, 2, \dots, 100$.

Общее решение: $x_k = a \cdot 2^k + b \cdot 3^k$.

Для d_n легко вычислить: $d_n = 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k = 3^{k+1} - 2^{k+1}$!