Собственные векторы и соб. значения

$|X|\ 2 = 1$

<u>Пример:</u> В последние годы из города N 14% жителей переезжает в пригороды, а из пригородов 21% переезжает в город N. Сейчас в городе живет 150т, в пригородах 50т. Что мы можем ожидать через 5 лет, через 10 лет, если тенденция сохранится.

<u>Решение:</u> Пусть x живет в городе, y — в пригороде. Тогда на след. год будет

$$x' = (1{,}00 - 0{,}14)x + 0{,}21y = 0{,}86x + 0{,}21y$$
$$y' = 0{,}14x + (1{,}00 - 0{,}21)y = 0{,}14x + 0{,}79y$$

То есть $X' = AX$ где $A = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.21 \\ 0.14 & 0.79 \end{pmatrix}$

Заметим, что суммы по столбцам равны 1.

<u>Предл.</u> Если суммы элементов столбцов матрицы A равны 1, то $\lambda = 1$ явл. соб. значением.

<u>Действ:</u> Рассм A^T - суммы по строкам будут равны 1.

$\Leftrightarrow A^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ — мы указываем соб. вектор для $\lambda = 1$.

$$\Rightarrow \det(A^T - \lambda E)\Big|_{\lambda=1} = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda E)\Big|_{\lambda=1} = 0.$$

Можно найти соотв. собственный вектор

$A - E = \begin{pmatrix} -0.14 & 0.21 \\ 0.14 & -0.21 \end{pmatrix}$; отсюда решение имеет вид $X_1 = a \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Заметим, что для матрицы 2×2 — сумма соб. значений равна сумме диагональных элементов (собственно для $n\times n$ - то же)

$\boxed{X}\ 2 = 2$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0.86 + 0.79 - 1 = 0.65$

$A - 0.65E = \begin{pmatrix} 0,21 & ; 0,21 \\ 0,14 & ; 0,14 \end{pmatrix} \Rightarrow$ собств. вектор $X_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Сейчас $\begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix}$

Складывая видим $200 = 5a + 0 \cdot b$ $\quad a = 40$.

Через 5 лет:

$$A^5 \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \end{bmatrix} + (0.65)^5 \cdot \begin{bmatrix} 30 \\ -30 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.5 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$

$(0.65)^5 \approx 0,116$

$30 \times 0,116 \approx 3,5$

Стабильное состояние 120 т в городе
80 т в пригороде.

Через 5 лет примерно так и будет (если тенденции сохранятся)

$\approx > \begin{cases} 123 \text{ т} \pm \text{погрешность в городе} \\ 77 \text{ т} \pm \text{погрешность в пригороде.} \end{cases}$

<u>Напомню</u>: Для каждого корня характеристического многочлена $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ есть собств. вектор.

<u>Известно</u>: в $\mathbb{C}$ любой многочлен имеет корень.

<u>Сл.</u> Если $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, то любая матрица / оператор имеет собственный вектор.

Я хочу доказать более сильный результат: $|X|2 = 3$

Теорема. Пусть V — конечномерное вект. пространство над $\mathbb{C}$. и $A, B : V \to V$ — операторы на V, коммутирующие: $AB = BA$.
Тогда они имеют общий собственный вектор. Более того:

Если λ — собственное значение для A, то $\exists\, v \neq 0$:

$Av = \lambda v$ — собств для A с соб. знач. λ

$Bv \in \mathbb{C}v$ — собств для B с некоторым соб. значением.

Предл: Пусть $U = \{ v \mid Av = \lambda v \} \neq 0$ подпространство собственных векторов для A, соб. знач λ.

Тогда $BU \subset U$ — оно инвариантно относительно B.

Док: Пусть $v \in U$, посчитаем

$$A(Bv) = BAv = B(\lambda v) = \lambda Bv \Rightarrow Bv \in U$$

Предл: Если $BU \subset U$, то $\exists$ соб. вектор B лежащий в U. (над $\mathbb{C}$)

Отступление:

Лемма: Пусть $U \subset V$ подпространство, $e_1 \dots e_k$ базис в U, дополненный $e_{k+1} \dots e_n$ до базиса в V.

и $\mathcal{B}: V \to V$ линейный оператор с матрицей B. Тогда.

U - $\mathcal{B}$-инвариантно $\iff$ B имеет угол нулей $(n-k)\times k$ слева внизу.
$$\begin{array}{cc} & k \\ k & \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array}$$

Действительно: угол 0 $\iff$ в первых k столбцах есть только первые k элементов (ост $= 0$)

$\Longleftarrow$

при $i = 1, \dots, k$: $\mathcal{B}(e_i) = \sum_{j=1}^{k} b_{ji} e_j$.

Пример. $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma(e_1) = 1\cdot e_1 + 3e_2 \\ \gamma(e_2) = 2e_1 + 5e_2. \end{array}$

Ищем соб. вектор в подпространстве $\langle e_1, e_2 \rangle$; $\Rightarrow$ вида $x_1 e_1 + x_2 e_2$

$$\Gamma \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Вывод: В условиях леммы можно рассмотреть

$\gamma|_{U}$ — ограничение γ на U. Матрица $\gamma|_{U}$ будет $(k \times k)$ матрица стоящая в левом верхнем углу Γ. !

Заключение: Так как $BU \subset U$, то U — инвар. относ. B.

Можно рассмотреть "ограничение B на U" — $B|_{U} =: \tilde{B}$

Так как $U \neq 0$, и над $\mathbb{C}$, то $\exists$ корень характеристического многочлена $g(\mu) = \det(\tilde{B} - \mu E)$

и соответствующий собственный вектор:

$$v \in U : Bv = \mu \cdot v$$

Но по определению U : $Av = \lambda \cdot v$. ■

Резюме: Мы рассмотрели важную конструкцию и доказали важную теорему!

Предложение: Над $\mathbb{C}$: Пусть $\varphi: V \to V$ и U - инвариантное подпространство, $\dim U = k$.
Тогда $\exists \tilde{U} \supset U$, тоже инвариантное и $\dim \tilde{U} = k+1$.

Док: Выберем базис $e_1 \dots e_k$ - базис в U, $e_{k+1} \dots e_n$ дополняет.

Пусть $\Gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ матрица оператора в этом базисе.

Тогда: Рассмотрим собственный вектор для C:

$\exists \lambda, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-k} \end{pmatrix} : CY = \lambda Y$. Тогда $\Gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY \\ \lambda Y \end{pmatrix}$.

Пусть $\tilde{v} = y_1 e_{k+1} + \dots y_{n-k} \cdot e_n$.

$\varphi \cdot \tilde{v} = \lambda \tilde{v} + \tilde{v}'$, где $\tilde{v}' \in U$ (лин. комбинация $e_1, \dots, e_k$)

$\Rightarrow$ Положим $\tilde{U} = \mathbb{k} \cdot \tilde{v} + U$, имеет размерность $(k+1)$ и φ-инвариантно ∎

Теорема: Над $\mathbb{C}$: $\forall \varphi: V \to V$, существует базис $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ в котором матрица φ - треугольная.

Док: По индукции строим. U_1 - 1-мерное инвариантное (находя собств. вектор)

$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \dots$

2-мерное инвариантное

Затем строим базис так, чтобы $\tilde{e}_1 .. \tilde{e}_i$ - базис в U_i.

$\Rightarrow$ матрица будет $\begin{pmatrix} * & * & \\ 0 & * & \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$ - треугольная ∎.

Аннулирующие многочлены:

Опр: Говорят, что многочлен $f(x)$ аннулирует оператор $h: V \to V$ если $f(h)=0$.

Будем обозначать f, g — произвольные многочлены и через χ — характеристический многочлен для h.

Пример: Пусть A — матрица h и $\dim V = 2$.

$h(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} \cdot e_2$ ⟨элементы 1-го столбца $\begin{smallmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{smallmatrix}$⟩

$h(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$

Запишем это как два уравнения

$$\begin{cases} (a_{11} - h) e_1 + a_{21} e_2 = 0 & (1) \\ a_{12} e_1 + (a_{22} - h) e_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Посчитаем $(a_{22} - h) \cdot (1) - a_{21} \cdot (2)$:

$$\begin{aligned} &(a_{22} - h)(a_{11} - h) \cdot e_1 + (a_{22} - h) a_{21} e_2 = 0 \\ - \ &a_{21} \cdot a_{12} \, e_1 + a_{21} (a_{22} - h) \, e_2 = 0 \\ \hline &\big((a_{22} - h)(a_{11} - h) - a_{21} a_{12} \big) e_1 + 0 = 0 \Leftrightarrow \chi(h) \cdot e_1 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично: $-a_{12} \cdot (1) + (a_{11} - h) \cdot (2)$:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - h) a_{12} \cdot e_1 + (a_{11} - h)(a_{22} - h) e_2 = 0 \\ - \ &a_{12} (a_{11} - h) \cdot e_1 + a_{12} \cdot a_{21} \cdot e_2 = 0 \\ \hline &0 + \chi(h) \cdot e_2 = 0 \Rightarrow \chi(h): \begin{matrix} e_1 \to 0 \\ e_2 \to 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

То есть $\chi(h) = 0$ на V

$\boxed{X} \; 2 = 7$

Это — частный случай теоремы

Теорема Гамильтона-Кэли: Если $\chi(x)$ есть характеристический многочлен для h, то $\chi(h) = 0$ он — аннулирует h.

Что мы использовали в предыдущем рассуждении?

У нас была матрица $\begin{pmatrix} a_{11}-h & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-h \end{pmatrix}$

Мы умножали ее строчки на алгебраические дополнения и складывали. Но элементами матрицы были не просто числа, а выражения содержащие числа и h.

Можно заменить h любой буквой, например x.

Предложение: Пусть $\tilde{A}$ есть матрица $n \times n$, элементы которой $\tilde{a}_{ij} \in \mathbb{k}[x]$ — многочлены от x. Положим

$\tilde{b}_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ji}$, где M_{ji} — дополнительный минор места $(j;i)$ в $\tilde{A}$.

и $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ ясно что $\tilde{b}_{ij} \in \mathbb{k}[x]$ — многочлены.

Тогда $\tilde{B} \cdot \tilde{A} = \det(\tilde{A}) \cdot E$.

Док: Принцип продолжения алгебраических тождеств.

Подставим вместо x значения $s_1, \dots, s_N$: $\tilde{B}\big|_{x=s_k} \cdot \tilde{A}\big|_{x=s_k} = \det(\tilde{A})\big|_{x=s_k} \cdot E$

отсюда: $[\tilde{B} \cdot \tilde{A}]_{ij}(s_k) = [\det(\tilde{A}) \cdot E]_{ij}(s_k)$

но многочлены какой-то степени.

если N — больше степени, то они равны как многочлены!

Применим это к док. Теорем Г. Кэли. $\boxed{X}$ 2 = 8

$\left\{ \bigcirc = a_{1i} \cdot e_1 + \dots + (a_{ii} - h) e_i + \dots + a_{ni} e_i \Leftrightarrow (A^T - h) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = 0 \right.$

Рассм $\tilde{A} = A^T - x$ – матрица с элементами из $\mathbb{k}[x]$

Построим $\tilde{B}$ и $\tilde{B} \cdot \tilde{A} = \det(A^T - x) \cdot E$

<u>Значит</u> $\tilde{B}\big|_{x=h} \cdot \underbrace{(A^T - h) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}}_{=0} = \underbrace{\det(A^T - h)}_{=\chi(h)} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$

То есть $\chi(h) \cdot e_i = 0 \ \forall i$: То есть $\chi(h) = 0$ ∎